

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = -\eta\mu 25^\circ$

γ) $3\eta\mu x + 5 = 0$

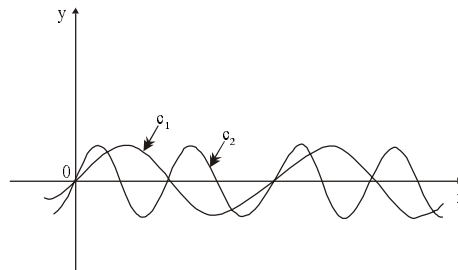
ε) $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ$

β) $\eta\mu x = \eta\mu (2x + 20^\circ)$

δ) $\sigma\upsilon\nu (x + 50^\circ) = \eta\mu (x + 20^\circ)$

ζ) $\sigma\phi^2 x - 1 = 0$

2. ** Η μουσική νότα που παράγεται από ένα μουσικό όργανο (π.χ. πιάνο) είναι ένας σύνθετος ήχος, ο οποίος είναι δυνατόν να αναλυθεί σε έναν βασικό, που μπορεί να αναπαρασταθεί με την καμπύλη



$C_1: y = \eta\mu x$ και σε πολλούς άλλους, οι οποίοι ονομάζονται αρμονικοί και έχουν πολλαπλάσιες συχνότητες του βασικού. ένας αρμονικός είναι και αυτός που αναπαρίσταται με την καμπύλη C_2 .

α) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης C_2 .

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής των C_1, C_2 με τον άξονα $x'x$.

γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής των C_1, C_2 .

3. ** Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $\sigma\upsilon\nu 33^\circ \sigma\upsilon\nu 12^\circ - \sigma\upsilon\nu 57^\circ \eta\mu 12^\circ$

4. ** Να δειχθεί ότι:

α) $\epsilon\phi (45^\circ - \omega) = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega}$

β) $\epsilon\phi (\alpha + \beta) \epsilon\phi (\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi^2 \alpha - \epsilon\phi^2 \beta}{1 - \epsilon\phi^2 \alpha \epsilon\phi^2 \beta}$

5. ** Να αποδείξετε ότι:

α) $\sin x + \sin (120^\circ + x) + \sin (240^\circ + x) = 0$

β) $\sin (\alpha + \beta) \eta\mu (\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\beta$

γ) $(\sin x - \eta\mu x) \epsilon\phi (\frac{\pi}{4} + x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$

6. ** Να δείξετε ότι: $\eta\mu (x - y) + \sigma\upsilon\nu (x + y) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) (\sigma\upsilon\nu y - \eta\mu y)$

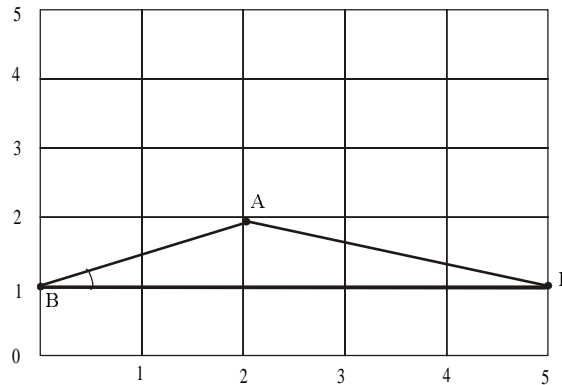
7. ** Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ και $\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{3}$ να βρεθεί η $\epsilon\phi\beta$.

8. ** Αν $x - y = 60^\circ$ και $\epsilon\phi y = \frac{2}{5}$ να βρεθεί η $\epsilon\phi x$.

9. ** Αν $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ και $\epsilon\phi y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, να δείξετε ότι:

$$x - y = \frac{\pi}{4}.$$

10. ** Στο τρίγωνο ABΓ να υπολογιστεί η γωνία A.



11. ** Αν $\eta\mu x + \eta\mu y = \kappa$ και $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \lambda$, τότε:
- α) να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(x - y) = \frac{\kappa^2 + \lambda^2 - 2}{2}$
- β) για $\kappa = -\sqrt{2}$ και $\lambda = 1$ να βρείτε τη διαφορά $x - y$.
12. ** Αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$, τότε $\eta\mu^2(\alpha + \beta) = (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2$.
13. ** Να δείξετε ότι
- $\sigma\upsilon\nu(45^\circ - x)\sigma\upsilon\nu(45^\circ - y) - \eta\mu(45^\circ - x)\eta\mu(45^\circ - y) = \eta\mu(x + y)$.
14. ** Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta - 1$
15. ** Αν $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ να αποδειχθεί ότι:
- α) $\epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\beta\epsilon\phi\gamma + \epsilon\phi\gamma\epsilon\phi\alpha = 1$
- β) $\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta + \sigma\phi\gamma = \sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma$
16. ** Αν $\alpha + \beta = \gamma$ να δείξετε ότι:
- $\epsilon\phi\gamma - \epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta = \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta\epsilon\phi\gamma$
17. ** Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{1}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ να υπολογιστούν το $\eta\mu 2\theta$ και η $\epsilon\phi 2\theta$.
18. ** Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:
- α) $\frac{\eta\mu 2x}{1 - \sigma\upsilon\nu 2x} = \sigma\phi x$
- β) $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{1 - \sigma\upsilon\nu 2x} = \sigma\phi^2 x$
- γ) $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2$

19. ** Να δειχθεί ότι: $\sin^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = \sin\delta\alpha$

20. ** Να δείξετε ότι:

α) $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\epsilon\varphi 2\alpha$

β) $\frac{1 + \eta\mu 2\theta - \sigma\upsilon\nu 2\theta}{1 + \eta\mu 2\theta + \sigma\upsilon\nu 2\theta} = \epsilon\varphi\theta$

γ) $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \sigma\varphi 2\alpha$

21. ** Δείξτε ότι: $\frac{\epsilon\varphi^2 2\alpha - \epsilon\varphi^2 \alpha}{1 - \epsilon\varphi^2 2\alpha\epsilon\varphi^2 \alpha} = \epsilon\varphi 3\alpha \cdot \epsilon\varphi\alpha.$

22. ** Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}.$

23. ** Να δείξετε ότι $\frac{\sigma\varphi\alpha + 1}{\sigma\varphi\alpha - 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \eta\mu 2\alpha}.$

24. ** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$

β) $2\eta\mu^2\theta = 3(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)$

γ) $\sigma\upsilon\nu 2x - 4\sigma\upsilon\nu x - 5 = 0$

δ) $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu^2 x$

ε) $\eta\mu 2x = 2\epsilon\varphi x$

ζ) $\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu \frac{x}{2} + 1$

η) $\epsilon\varphi^4 x - 4\epsilon\varphi^2 x + 3 = 0$

θ) $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2\sqrt{3}$

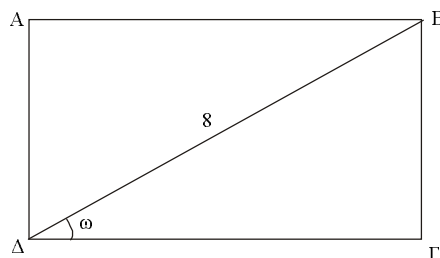
25. ** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{\eta\mu 2\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

β) $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu 9\alpha + \sigma\upsilon\nu 13\alpha}{\eta\mu\alpha - \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 9\alpha - \eta\mu 13\alpha}$

26. ** Αν A, B, Γ γωνίες τριγώνου και $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = \eta\mu\Gamma$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

27. ** Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ η διαγώνιος ΒΔ έχει μέτρο 8.



α) Να υπολογίσετε τις πλευρές ΒΓ και ΓΔ συναρτήσει της γωνίας ω.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ω όταν η περίμετρος του ορθογωνίου παίρνει τη μέγιστη τιμή.

28. ** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{3} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0$

β) $\eta\mu x - \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu x = 2$

γ) $\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x = \sqrt{2}$

29. ** Να λυθεί στο διάστημα $[0, \pi]$ η εξίσωση: $\sqrt{2} \eta\mu 2x + \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu 2x = 1$

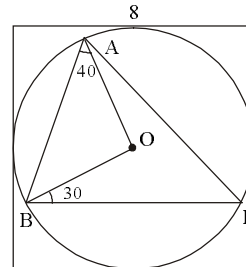
30. ** Σ' ένα τρίγωνο ABΓ είναι $A = 120^\circ$.

α) Ναδειχθεί ότι: $\alpha^2 - \beta\gamma = \beta^2 + \gamma^2$

β) Αν $\alpha = \sqrt{3}$ και $\beta = \sqrt{2}$ να βρεθούν οι γωνίες Β και Γ.

31. ** Στο διπλανό σχήμα να βρεθούν:

- α) Οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
- β) Οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.
- γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

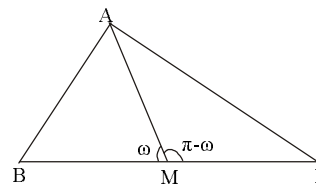


32. ** Με τη βοήθεια της Τριγωνομετρίας έχουμε τη δυνατότητα να αποδείξουμε πολλά θεωρήματα της Γεωμετρίας.

α) Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ

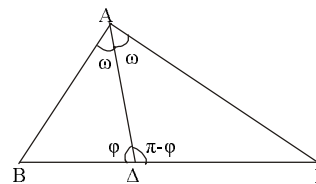
$$\text{ισχύει } \beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \text{ όταν } \mu_\alpha \text{ είναι η}$$

διάμεσος ΑΜ.

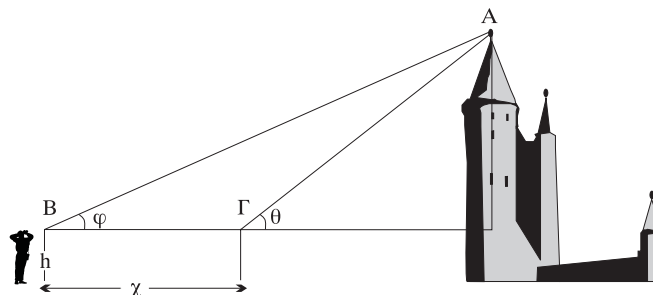


β) Αν ΑΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ να

$$\text{δείξετε ότι } \frac{AB}{AG} = \frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}.$$



33. ** Ένας παρατηρητής βλέπει από τη θέση Β την κορυφή Α ενός απρόσιτου πύργου υπό γωνία φ. Αν πλησιάσει τον πύργο κατά x μέτρα βλέπει την κορυφή Α υπό γωνία θ. Να υπολογιστεί το ύψος του πύργου, αν γνωρίζουμε ότι ο οφθαλμός του παρατηρητή βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος.



34. ** Ένας ορειβάτης βρίσκεται στους πρόποδες ενός βουνού στο σημείο A και βλέπει την κορυφή Γ του βουνού υπό γωνία 60° . Όταν ανέβει στο σημείο B βλέπει την κορυφή Γ υπό γωνία 75° . Αν η απόσταση $B\Gamma = 1200$ m και η γωνία $\text{BA}\Delta = 30^\circ$, να υπολογιστεί το ύψος $\Gamma\Delta$ του βουνού.

