Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = x^3 - 2x$, $Q(x) = x^2 - 3x - 1$. Να βρεθούν:
α) $P(x) + Q(x)$
β) $P(x) - Q(x)$
γ) $P(x) . Q(x)$

2. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in R$ για την οποία το πολυώνυμο:
$P(x) = (\lambda + 2)\, x^3 - (\lambda^2 + \lambda - 2)\, x + \lambda^2 - 4$
να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

3. Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι το πολυώνυμο
$P(x) = (\alpha - \beta)\, x^2 + (\beta - \gamma)\, x + \gamma - \alpha$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 2)\, x^2 + (2\lambda + 6)\, x + \kappa + \lambda - 3$
είναι διάφορο του μηδενικού.

5. Να βρεθεί για ποιες τιμές των κ, λ, μ είναι ίσα τα πολυώνυμα:
$P(x) = \lambda x^2 - (\lambda - \kappa)\, x + \mu - 2\lambda$
$Q(x) = (\mu - \lambda)\, x^2 + 4x + \kappa + \lambda$.

6. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in R$ ώστε το πολυώνυμο
$P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x - 27$
να παίρνει τη μορφή $\alpha\,(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

7. Να βρεθεί πολυώνυμο $K(x)$ τέτοιο ώστε το τετράγωνό του να ισούται με το:
$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.

8. Να δειχθεί ότι για κάθε $\kappa \in R$ το πολυώνυμο
$P(x) = (\kappa - 1)\, x^5 + (3\kappa^2 + 2)\, x^3 + \kappa x$ δεν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$.

9. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + 2\alpha$ έχει ρίζα το -1 αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το $K(x) = x^3 + 4x^2 + (\alpha^2 - 1)x$. Το αντίστροφο ισχύει;

10. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:
$(x^2 + 1)P(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + 2x + 5$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει: $P(\alpha - 1) = 13$.

12. Να γίνουν οι διαιρέσεις:
α) $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$
β) $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$
γ) $(3x^3 - 4\alpha x + \alpha^2) : (x - 2\alpha)$
δ) $[7x^3 - (9\alpha + 7\alpha^2)x + 9\alpha^2] : (x - \alpha)$

13. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.

14. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

15. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β.

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$. Αν το $P(x)$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in R$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^2 + 2(\lambda^2 - 3\lambda + 1)x - 3(4\lambda + 1)$. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ.

18. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο P (x) έχει παράγοντα το x - 5, τότε το πολυώνυμο P (2x - 3) έχει παράγοντα το x - 4.

19. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) $(x^3 - 2x^2 + 5x - 6) : (x - 2)$

β) $(2x^5 - x^4 + 6x^2 + 3) : (x + 1)$

γ) $[6x^3 - (2α + 6α^2)\, x + 3α^2] : (x - α)$, $α \in R$

δ) $(x^6 - 4x^5 + x^2 - 2) : (2x - 1)$

ε) $(x^5 - \frac{1}{λ^2}\, x^3 + λx^2 - 2) : (λx + 1)$, $λ \in R^*$

20. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - κx^2 + (λ - 1)\, x + 5$ να έχει για παράγοντα το $(x - 1)(x + 2)$.

21. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - (3 + α)\, x + β + 10$ να έχει για παράγοντα το $(x - 2)^2$.

22. Το πολυώνυμο P (x) διαιρούμενο με x - 2 αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με x + 3 αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του P (x) με το (x - 2) (x + 3).

23. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:

α) $x^3 - 8x + 7 = 0$

β) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$

γ) $(x^3 - 2x)\, x + x + 2 = 0$

δ) $(x - 1)(x^4 + 4) - 3(x + 4) = 0$

ε) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

24. Αν κ ακέραιος αριθμός να δειχθεί ότι η εξίσωση: $5x^{2ν} + 9κx - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

25. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

β) $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

γ) $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$

δ) $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

26. Δίνεται η εξίσωση $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1 = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εξίσωση να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών.

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

β) $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9\,(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

γ) $(x + 2)^8 - 3\,(x + 2)^4 - 4 = 0$

δ) $\left(\frac{x - 1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{x - 1}{x}\right) + 6 = 0$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x}{x - 1} + \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{2}{x^2 - 1}$ β) $\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} = x^2$

29. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1$ β) $\frac{x^2}{x + 1} - \frac{4}{x - 1} \leq \frac{2}{x^2 - 1}$

30. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6\,(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$

β) $2\eta\mu^3 x + 5\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x + 2 = 0$

γ) $2\sigma\upsilon\nu^4 x - 5\sigma\upsilon\nu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

31. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{x-3} = 5$

β) $x - \sqrt{25-x^2} = 1$

γ) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 2$

δ) $2\sqrt{5-4x} = 5-4x$

ε) $\sqrt{x^2-x+5} = x-3$

32. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\sqrt{x-2} < \sqrt{2x+1}$

β) $\sqrt{4x+1} < \sqrt{1-2x}$