ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ	8.	Σ	15.	Λ
2.	Σ	9.	Σ	16.	Σ
3.	Σ	10.	Λ	17.	Σ
4.	Λ	11.	Σ	18.	Λ
5.	Σ	12.	Λ	19.	Σ
6.	Λ	13.	Λ	20.	Λ
7.	Σ	14.	Λ		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Β	11.	Δ	21.	Ε
2.	Α	12.	Β	22.	Γ
3.	Ε	13.	Β	23.	Δ
4.	Γ	14.	Δ	24.	Ε
5.	Γ	15.	Δ	25.	Γ
6.	Β	16.	Γ	26.	Ε
7.	Γ	17.	Δ	27.	Β
8.	Δ	18.	Α	28.	Δ
9.	Δ	19.	Γ	29.	Δ
10.	Α	20.	Δ	30.	Α

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $x^3 + x^2 - 5x - 1$
β) $x^3 - x^2 + x + 1$
γ) $x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x$

2. $\lambda = -2$

3. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\left[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\right]$$

και επειδή $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ είναι $\alpha = \beta = \gamma$ κλπ.

4. Δεν υπάρχει τιμή των πραγματικών αριθμών κ, λ ώστε να μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές $\kappa - 2$, $2\lambda + 6$, $\kappa + \lambda - 3$.

5. $\kappa = 2$, $\lambda = -2$, $\mu = -4$

6. $\alpha = 8$

7. Το Κ (x) πρέπει να είναι 2ου βαθμού.
Έστω $K(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$
$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε: $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = \mp 2$

8. Πρέπει $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Βρίσκουμε $12\kappa^2 + 17\kappa + 7 = 0$ και επειδή $\Delta < 0$, δεν υπάρχει $\kappa \in R$ ώστε το $\frac{1}{2}$ να είναι ρίζα του πολυωνύμου.

9. Ισχύει $P(-1) = 0$. Βρίσκουμε $\alpha = -2$. Για $\alpha = -2$ ισχύει και $K(-1) = 0$, άρα το -1 είναι ρίζα του $K(x)$.
Το αντίστροφο δεν ισχύει, γιατί αν το -1 είναι ρίζα του $K(x)$ βρίσκουμε $\alpha = \pm 2$. Οπότε για $\alpha = 2$ το $P(x)$ δεν έχει ρίζα το -1, διότι $P(-1) \neq 0$.

10. Το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού.
Άρα πρέπει $(x^2 + 1)(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$.
Βρίσκουμε $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = -2$, $\delta = -3$.

11. $P(\alpha - 1) = 13 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + 2(\alpha - 1) + 5 = 13$. Βρίσκουμε $\alpha = \pm 3$.

13. Το $f(x)$ θα είναι 3ου βαθμού.
Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$.
Θα ισχύει: $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 1) + 2x + 5$.
Βρίσκουμε $\alpha = 3$, $\beta = -1$, $\gamma = 5$, $\delta = 4$.

14. Η διαίρεση των πολυωνύμων δίνει υπόλοιπο:
$\upsilon(x) = (2\kappa\lambda - \kappa^3)x - \lambda(\kappa^2 - \lambda) + 1$
Πρέπει $2\kappa\lambda - \kappa^3 = 0$ και $-\lambda(\kappa^2 - \lambda) + 1 = 0$.
Βρίσκουμε $\lambda = 1$ και $\kappa = \pm\sqrt{2}$.

15. Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} f\,(2) = 0 \\ f\,(1) = 8 \end{cases}$ βρίσκουμε $α = -9$, $β = 12$.

16. Βρίσκουμε ότι οι ρίζες της $x^2 - x - 6 = 0$ είναι -2, 3.
Πρέπει $P\,(-2) = 0$ και $P\,(3) = 0$. Βρίσκουμε $α = -1$, $β = -6$.

17. Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $υ = P\,(-2) = -7$.

18. Αφού το $P\,(x)$ έχει παράγοντα το $x - 5$, ισχύει $P\,(5) = 0$.
Για να έχει το $P\,(2x - 3)$ παράγοντα το $x - 4$ πρέπει το πολυώνυμο για $x = 4$ να μηδενίζεται. Πράγματι, για $x = 4$ έχουμε $P\,(2 \cdot 4 - 3) = P\,(5) = 0$.

19. **α)** $π\,(x) = x^2 + 5$, $\quad υ = 4$

β) $π\,(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 3$, $\quad υ = 6$

γ) $π\,(x) = 6x^2 + 6αx - 2α$, $\quad υ = α^2$

δ) $π\,(x) = x^5 - \frac{7}{2}x^4 - \frac{7}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 + \frac{9}{16}x + \frac{9}{32}$, $\quad υ = -\frac{119}{64}$

ε) $π\,(x) = x^4 - \frac{1}{λ}x^3 + λx - 1$, $\quad υ = \frac{1}{λ} - 2$

20. Εργαζόμαστε με το σχήμα Horner

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -\kappa & \lambda-1 & 5 & 1 \\ \downarrow & 1 & 1-\kappa & \lambda-\kappa & \\ \hline 1 & 1-\kappa & \lambda-\kappa & \boxed{\lambda-\kappa+5} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-\kappa & \lambda-\kappa & -2 \\ \downarrow & -2 & 2+2\kappa & \\ \hline 1 & -1-\kappa & \boxed{2+\lambda+\kappa} & \end{array}$$

Πρέπει $\begin{cases} \lambda-\kappa+5=0 \\ \lambda+\kappa+2=0 \end{cases}$ Βρίσκουμε $\kappa = \frac{3}{2}$, $\lambda = -\frac{7}{2}$

21. $$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3-\alpha & \beta+10 & 2 \\ \downarrow & 2 & 2 & -2\alpha-2 & \\ \hline 1 & 1 & -1-\alpha & \boxed{\beta-2\alpha+8} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1-\alpha & 2 \\ \downarrow & 2 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & \boxed{5-\alpha} & \end{array}$$

Πρέπει $\begin{cases} \beta-2\alpha+8=0 \\ 5-\alpha=0 \end{cases}$ Βρίσκουμε $\alpha = 5$, $\beta = 2$

22. Είναι P (2) = 10 και P (- 3) = 5

Το πολυώνυμο P (x) γράφεται: $P(x) = (x - 2)(x + 3)\pi(x) + \alpha x + \beta$ (1)

Για $x = 2$ η (1) γίνεται: $P(2) = 2\alpha + \beta$

Για $x = -3$ η (1) γίνεται: $P(-3) = -3\alpha + \beta$

Βρίσκουμε $\alpha = 1$, $\beta = 8$

23. **α)** Πιθανές ακέραιες λύσεις οι ± 1, ± 7.

Εργαζόμαστε με σχήμα Horner και βρίσκουμε ακέραια λύση $x = 1$.

Ομοίως εργαζόμαστε και στα υπόλοιπα ερωτήματα.

24. Οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (αν υπάρχουν) θα είναι οι ± 1.

Για $x = 1$ η εξίσωση γίνεται: $5 \cdot 1^{2\nu} + 9\kappa \cdot 1 - 1 = 0$

Βρίσκουμε ότι $\kappa \notin Z$, άρα το 1 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

Ομοίως εργαζόμαστε και για $x = -1$.

25. **α)** Η ανίσωση, αν παραγοντοποιήσουμε το πρώτο μέλος, γράφεται:

$(x + 1)(x - 1)(x - 2) > 0$

Βρίσκουμε τα πρόσημα των παραγόντων $x + 1$, $x - 1$, $x - 2$ και με πίνακα καταλήγουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $-1 < x < 1$ ή $x > 2$.

β) Εργαζόμενοι αναλόγως βρίσκουμε $x \geq -1$.

γ) $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$

δ) $-\sqrt{2} \leq x \leq 1$ ή $\sqrt{2} \leq x \leq 2$

26. Το ανώτερο πλήθος ακέραιων ριζών της εξίσωσης είναι 2, δηλαδή οι διαιρέτες του 1.

Για $x = 1$ η εξίσωση γράφεται: $1 - α + β = 0$

Για $x = - 1$ η εξίσωση γράφεται: $- 1 + α + β - 2 = 0$

Βρίσκουμε $α = 2$, $β = 1$

27. **α)** Θέτουμε $x^3 = ω$ οπότε η εξίσωση γράφεται $ω^2 - 9ω + 8 = 0$.

Βρίσκουμε $ω = 1$ ή $ω = 8$, άρα $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Ομοίως εργαζόμαστε και στα υπόλοιπα ερωτήματα.

28. **α)** Πρέπει $x \neq \pm 1$. Μετά την απαλοιφή παρονομαστών η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $x^2 + x - 2 = 0$. Βρίσκουμε $x = - 2$ ή $x = 1$ (απορρίπτεται).

β) Πρέπει $x \neq 2$. Μετά την απαλοιφή του παρονομαστή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 4) = 0$.

Βρίσκουμε $x = 1$ ή $\dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$.

29. **α)** Πρέπει $x \neq 2$.

$$\frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3 + 2x - 4 - x + 2}{x - 2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + x - 2}{x - 2} < 0 \text{ άρα}$$

$(x - 2)(x^3 + x - 2) < 0$.

Βρίσκουμε $1 < x < 2$.

β) Πρέπει $x \neq \pm 1$, εργαζόμενοι αναλόγως με το (α) ερώτημα, βρίσκουμε ότι η ανίσωση γράφεται $(x^2 - 1)(x - 3)(x^2 + 2x + 2) \leq 0$.

x		-1		1		3	
$x^2 - 1$	$+$	‖	$-$	‖	$+$		$+$
$x - 3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x^2 + 2x + 2$	$+$		$+$		$+$		$+$
Γ	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$

Βρίσκουμε $x < -1$ ή $1 < x \leq 3$.

30. α) Θέτουμε $(2ημx - 1)^2 = y$.

Βρίσκουμε $x = 2κπ + \frac{π}{2}$ ή $x = κπ$, $κ \in Z$.

β) Θέτουμε $ημx = y$ και η εξίσωση γίνεται

$2y^3 + 5y^2 + 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(2y^2 + 3y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = -1$

άρα $ημx = -1 \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{3π}{2}$, $κ \in Z$.

γ) Θέτουμε $συνx = y$. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$(y - 1)(y + 1)(2y^2 - 5y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -1$ ή $y = \frac{1}{2}$

ή $y = 2$ (απορρίπτεται) κλπ.

31. **α)** Πρέπει $x \geq 3$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε:

$x - 3 = 25 \Leftrightarrow x = 28$, η οποία επαληθεύει την εξίσωση.

β) Πρέπει $-5 \leq x \leq 5$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και προκύπτει:

$25 - x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 4$

Δεχόμαστε μόνο την $x = 4$ που επαληθεύει την εξίσωση.

γ) Πρέπει $x \geq 0$ και $x \geq -1$.

Εργαζόμενοι αναλόγως βρίσκουμε $x = \frac{9}{16}$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βλέπουμε ότι δεν την επαληθεύει.

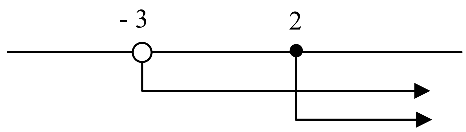
Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) $x = \frac{5}{4}$ ή $x = \frac{1}{4}$

ε) αδύνατη.

32. **α)** Πρέπει $x \geq 2$ και $x \geq -\frac{1}{2}$ που συναληθεύουν για $x \geq 2$.

Υψώνουμε στο τετράγωνο και βρίσκουμε: $x - 2 < 2x + 1 \Leftrightarrow x > -3$.



Τελικά, όπως φαίνεται από το σχήμα, είναι $x \geq 2$.

β) $-\frac{1}{4} \leq x < 0$