

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους των παρακάτω ακολουθιών:

α) $\alpha_v = 4v + 3$

β) $\alpha_v = 2 + (-1)^v$

γ) $\alpha_v = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{v \cdot (v+1)}$

δ) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_{v+1} = \frac{2}{3\alpha_v + 1}$

2. ** Να βρείτε τον αναδρομικό τύπο των ακολουθιών

α) $\alpha_v = 2v - 3$

β) $\beta_v = 5 \cdot 3^v$

γ) $\gamma_v = 1 + 2^v$

3. ** Να βρείτε τον γενικό τύπο των ακολουθιών

α) $\alpha_{v+1} = 1 + \alpha_v$, $\alpha_1 = -1$

β) $\beta_{v+1} = 3 \cdot \beta_v$, $\beta_1 = 15$

4. * Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{12} = 94$. Να βρείτε

α) τη διαφορά ω και

β) τον 10° όρο της προόδου.

5. ** Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 7$.

α) Να βρείτε το πλήθος v των πρώτων όρων της προόδου που δίνουν άθροισμα ίσο με 679.

β) Ποιος θα είναι ο τελευταίος όρος α_v σ' αυτή την περίπτωση;

6. ** Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της είναι $S_{20} = 610$ και το άθροισμα των 12 πρώτων όρων της $S_{12} = 222$. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον 1^ο όρο της .
7. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία
 α) το άθροισμα του 1^{ου} και του 5^{ου} όρου είναι -2, ενώ το άθροισμα του 2^{ου} και του 6^{ου} είναι 2
 β) το άθροισμα του 2^{ου} και του 4^{ου} όρου είναι 7, ενώ το γινόμενο των ίδιων όρων είναι 10.
8. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των 3 πρώτων της όρων είναι ίσο με -3 και άθροισμα των 5 πρώτων όρων ίσο με 10.
9. ** Να βρείτε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_6 = 8, \alpha_4 = 4$.
10. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν ο 2^{ος} και ο 7^{ος} όρος έχουν γινόμενο 100 και οι μεταξύ τους όροι έχουν άθροισμα 50
11. ** Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_9 = 15$ και $S_{12} = 165$.
 α) Να βρείτε τον 5^ο όρο της προόδου και
 β) το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.
12. ** α) Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο αν $\alpha_3 = 11$ και $\alpha_6 = 23$
 β) Πόσοι πρώτοι όροι της έχουν άθροισμα που δεν υπερβαίνει το 210;
13. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία ο 4^{ος} και ο 8^{ος} όρος της έχουν άθροισμα 18, ενώ το άθροισμα των κύβων των όρων αυτών είναι 3.402.

14. * Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $(\alpha + \beta)^2$, $\alpha^2 + \beta^2$ και $(\alpha - \beta)^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
15. * Αν οι αριθμοί $\frac{2}{\beta + \gamma}, \frac{2}{\gamma + \alpha}, \frac{2}{\alpha + \beta}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τους $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.
16. ** α) Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δείξτε ότι: $\alpha - \beta = \beta - \gamma$.
- β) Αν οι αριθμοί $\frac{\beta + \gamma - \alpha}{\alpha}, \frac{\gamma + \alpha - \beta}{\beta}, \frac{\alpha + \beta - \gamma}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι οι $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
17. ** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν άθροισμα 33 και γινόμενο 440.
18. ** Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν άθροισμα 16 και γινόμενο άκρων όρων 7.
19. ** Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 7 περιέχονται μεταξύ του 15 και του 300.
20. ** Να βρείτε το πλήθος και το άθροισμα
- α) των διψήφων περιττών αριθμών
 - β) των διψήφων αρτίων αριθμών
 - γ) των διψήφων φυσικών αριθμών
 - δ) των διψήφων πολλαπλασίων του 4.
21. ** α) Ποιο είναι το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της προόδου: 3, 5, 7, 9, ... ;

- β) Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους της προόδου αυτής πρέπει να προσθέσουμε, για να πάρουμε άθροισμα 99;
22. ** Μεταξύ των αριθμών 4 και 34 να παρεμβάλετε άλλους αριθμούς, ώστε να δημιουργηθεί μια αριθμητική πρόοδος με 11 όρους.
23. ** Πόσους αριθμούς πρέπει να παρεμβάλουμε μεταξύ του 5 και του 50 ώστε ο τελευταίος από τους αριθμούς αυτούς να είναι 3πλάσιος από τον δεύτερο και όλοι οι αριθμοί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;
24. ** Να βρείτε τις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν γνωρίζετε ότι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
25. ** Σε μια ευθεία θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A,B,Γ,Δ,E ώστε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων AB, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν $ΑΓ = 16\text{ cm}$ και $ΓΕ = 24\text{ cm}$ να βρείτε τα μήκη των AB, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ .
26. ** Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας:
 $1, -3, 5, -7, 9, -11, \dots$
27. ** Στις προόδους $(\alpha_n): 17, \underline{21}, 25, \dots$ και $(\beta_n): 16, \underline{21}, 26, \dots$ εμφανίζονται κοινοί όροι (όπως ο 21).
- α) Να βρείτε τον επόμενο κοινό τους όρο.
 β) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων κοινών όρων τους.
28. ** Να βρείτε τα αθροίσματα:
 α) $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (2 + 3n)$ και β) $3 + 5 + 7 + \dots + (3 + 2n)$.

29. ** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x+2)+(x+5)+(x+8)+\dots+(x+29)=165$.

β) $1+7+13+\dots+x=280$ με $x > 0$

30. ** Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι $a_n = 3n + 2$.

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο a_{n+1}

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της

δ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62

(Μπορούν να γίνουν και ανάλογα προβλήματα για $a_n = 4n - 2$ ή

$a_n = -3n + 13$ ή $a_n = -4n + 19$ κ.λ.π.)

31. *** Μιας ακολουθίας το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι

$$S_n = 3n^2 + n.$$

α) Να βρείτε το άθροισμα των $(n-1)$ πρώτων όρων της

β) Να βρείτε τον νιοστό της όρο

γ) Να βρείτε τον όρο a_{n+1}

δ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

ε) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 100

(Μπορούν να γίνουν και ανάλογα προβλήματα για $S_n = 2n^2 + 3n$ ή

$S_n = 4n^2 - 3n$ ή $S_n = -n^2 + 2n$ κ.λ.π.)

32. *** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των n πρώτων

όρων, για κάθε φυσικό αριθμό n , είναι $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

33. ** Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα των n πρώτων

όρων, για κάθε φυσικό αριθμό n , είναι $S_n = 2n^2$.

34. ** Ένας αγρότης, για μια γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρήπανου: το σκάψιμο του πρώτου μέτρου θα στοιχίσει 2.000 δρχ. και για κάθε επί πλέον μέτρο το κόστος σκαψίματος θα είναι κατά 500 δρχ. μεγαλύτερο από το κόστος σκαψίματος του προηγούμενου μέτρου.

Συμπληρώστε τον πίνακα:

I. i)	Βάθος	1ο m	2ο m	4ο m	...
	Κόστος μέτρου	2.000 δρχ.	2.500 δρχ.	...	7.500 δρχ.
	Κόστος γεώτρησης	2.000 δρχ.	4.500 δρχ.	...	...

- ii) Το βάθος στο οποίο το κόστος του μέτρου υπερβαίνει τις 5.000 δρχ. είναι

A. 3 m B. 5 m Γ. 6 m Δ. 7 m E. 8 m

- iii) Το βάθος στο οποίο το κόστος της γεώτρησης δεν υπερβαίνει τις 20.000 δρχ. είναι

A. 12 m B. 10 m Γ. 8 m Δ. 7 m E. 6 m

- iv) Με 30.000 δρχ. η γεώτρηση θα φθάσει σε βάθος

A. 4 m B. 5 m Γ. 6 m Δ. 8 m E. 10 m

- II. i) Πόσο κοστίζει το 25^ο μέτρο της γεώτρησης αυτής;
 ii) Πόσο κοστίζει συνολικά η γεώτρηση αν φθάσει τα 60 m βάθος;
 iii) Ένας δεύτερος αγρότης κάνει μια γεώτρηση του ίδιου βάθους και πληρώνει 18.000 δρχ. για κάθε μέτρο της. Πόσα μέτρα είναι το βάθος των γεωτρήσεων αν ξέρουμε ότι ο πρώτος έδωσε λιγότερα χρήματα;

35. ** Ένα κερί καίγεται με σταθερό ρυθμό. Στο τέλος της 1^{ης} ώρας είχε ύψος 36 cm, στο τέλος της 2^{ης} 33 cm, στο τέλος της 3^{ης} 30 cm κ.λπ.

- I. i) Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 3$ **Σ** **Λ**
 ii) Οι τιμές του ύψους του κεριού στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 36$ **Σ** **Λ**
 iii) Το ύψος του κεριού στο τέλος κάθε ώρας θα είναι πολλαπλάσιο του 3 **Σ** **Λ**
 iv) Στο τέλος της 5^{ης} ώρας το ύψος του κεριού θα είναι μικρότερο από 20 μέτρα **Σ** **Λ**
 v) Μετά από 15 ώρες το κερί δεν θα έχει λειώσει τελείως **Σ** **Λ**

II. i) Ποια από τις παρακάτω τριάδες είναι ύψη του κεριού στο τέλος τριών διαδοχικών ωρών:

- A.** 21 , 23 , 25 **B.** 18 , 20, 22 **Γ.** 24 , 25 , 26
Δ. 15 , 21, 27 **Ε.** 15 , 18 , 21

ii) Στο τέλος της 6^{ης} ώρας το ύψος του κεριού θα είναι

- A.** 25 cm **B.** 20 cm **Γ.** 18 cm **Δ.** 21 cm **Ε.** 24 cm

iii) Το ύψος του κεριού θα γίνει μικρότερο από 18 cm στο τέλος της

- A.** 4^{ης} ώρας **B.** 6^{ης} ώρας **Γ.** 8^{ης} ώρας **Δ.** 10^{ης} ώρας **Ε.** 12^{ης} ώρας

iv) Το κερί **δεν** θα έχει λειώσει τελείως μετά από

- A.** 25 ώρες **B.** 20 ώρες **Γ.** 18 ώρες **Δ.** 15 ώρες **Ε.** 12 ώρες

v) Το ύψος που θα έπρεπε να έχει το κερί, για να λειώσει τελείως μετά από 24 ώρες είναι

- A.** 59 cm **B.** 66 cm **Γ.** 68 cm **Δ.** 69 cm **Ε.** 72 cm

III. α) Πόσο θα είναι το ύψος του στο τέλος της 8^{ης} ώρας;

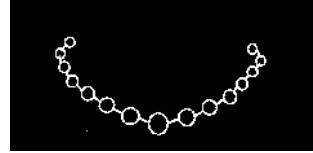
β) Στο τέλος ποιας ώρας θα έχει ύψος 9 cm;

γ) Πόσο ήταν το ύψος την στιγμή που το ανάψαμε;

δ) Πόσες ώρες θα μείνει αναμμένο;

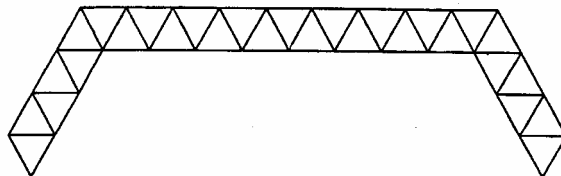
36. ** Σ' έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων, τα γραφεία του ιδίου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 55.000 δρχ. το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 3.500 δρχ. το μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγούμενου ορόφου.
- Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;
 - Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του 15^{ου} ορόφου από ένα του 7^{ου} ορόφου;
 - Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τις 100.000 δρχ. το μήνα;
 - Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγούμενου ορόφου και ο 17^{ος} όροφος έχει 12 γραφεία, πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος;
37. ** Α. Οι μαθητές ενός σχολείου θέλησαν να γραφτούν στο βιβλίο Γκίνες κάνοντας ρεκόρ στο σχηματισμό της υψηλότερης ανθρώπινης πυραμίδας που θα ισορροπούσε για ένα λεπτό. Μπήκαν λοιπόν σε σειρές ως εξής: στην κορυφή ένα άτομο, στην επόμενη σειρά δύο, στην αμέσως πιο κάτω σειρά τρεις κ.λ.π. Έτσι κατάφεραν συνολικά 45 μαθητές να κάνουν το ρεκόρ.
- Πόσες σειρές είχε η πυραμίδα που σχημάτισαν;
 - Πόσοι τουλάχιστον μαθητές θα χρειαστούν ώστε να σπάσει το ρεκόρ αυτό, αν σχηματίσουν με παρόμοιο τρόπο μια νέα πυραμίδα;
- Β. Ένα μήνα μετά οι μαθητές ενός γειτονικού σχολείου σχημάτισαν με όμοιο τρόπο μια πυραμίδα υψηλότερη κατά 3 σειρές και έσπασαν το ρεκόρ.
- Πόσοι συνολικά ήταν μαθητές αυτοί;
 - Αν οι μαθητές που παίρνουν μέρος στο σχηματισμό της πυραμίδας δεν ξεπερνούν τους 210, πόσες σειρές μπορούν να σχηματίσουν;
38. ** Μια ομάδα 324 στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα ώστε: στην πρώτη σειρά μπαίνει ένας στην δεύτερη τρεις, στην τρίτη πέντε κ.λ.π.
- Πόσοι θα είναι στην 12^η σειρά;
 - Πόσες σειρές σχηματίστηκαν συνολικά;

39. ** Ένα κολιέ αξίας 650.000 δρχ. αποτελείται από 33 διαμάντια. Το μεσαίο διαμάντι είναι και το ακριβότερο. Τα υπόλοιπα διαμάντια είναι τοποθετημένα κατά σειρά αξίας, ώστε κάθε διαμάντι μέχρι το μεσαίο να αξίζει 1.000 δρχ. λιγότερο από το επόμενο του και στη συνέχεια, από το μεσαίο και πέρα, κάθε διαμάντι να αξίζει 1.500 δρχ. λιγότερο από το προηγούμενό του.
- A. α) Πόσες δρχ. φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το πρώτο;
 β) Πόσες δρχ. φθηνότερο από το μεσαίο διαμάντι είναι το τελευταίο;
 B. Πόσες δρχ. είναι η αξία του μεσαίου διαμαντιού;



40. ** A. Σε μια αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η 28 καθίσματα.
- α) Πόσα καθίσματα έχει η 10η σειρά;
 β) Πόσα καθίσματα υπάρχουν από την 4η έως την και την 10η σειρά;
 B. Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η 12 κ.λ.π.
- α) από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα;
 β) Πόσοι θα είναι οι θεατές;

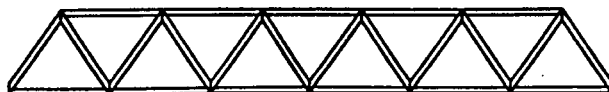
41. *** Στις σύγχρονες βιομηχανικές εγκαταστάσεις χρησιμοποιούνται για την στήριξη των οροφών ειδικές ανσίδες (όπως αυτή στο παρακάτω σχήμα 1),



(Σχ. 1)

που τοποθετούνται επάνω σε τσιμεντένιες κολώνες.

Οι αψίδες αυτές σχηματίζονται από δοκάρια (όπως στο παρακάτω σχήμα 2),



(Σχ. 2)

διαφορετικού μήκους που αποτελούνται από ίσες μεταλλικές ράβδους.

Τα δοκάρια ονομάζονται με τον αριθμό που δείχνει το πλήθος των ράβδων της μεγαλύτερης πλευράς τους (π.χ. στο σχήμα 2 έχουμε δοκάρι νούμερο 6).

- A. α) Πόσες ράβδους έχει ένα δοκάρι νούμερο 4;
- β) Πόσες ράβδους διαφορά έχουν δυο δοκάρια με διαδοχικά νούμερα;
- B. α) Να βρείτε έναν τύπο που να συνδέει τον νούμερο k ενός δοκαριού, με το πλήθος p των ράβδων του.
- β) Σε πόση απόσταση πρέπει να μπουν οι τσιμεντοκολώνες που θα στηρίζουν την αψίδα του σχήματος 1, αν κάθε ράβδος έχει μήκος 0,5 m;

42. ** Κατά τη διάρκεια έργων συντήρησης του οδοστρώματος ενός τμήματος της εθνικής οδού, είχαν τοποθετηθεί ειδικοί φωτεινοί σηματοδότες (σχήματος βέλους) που εμπόδιζαν την κυκλοφορία σε εκείνο το τμήμα του δρόμου. Οι σηματοδότες αυτοί ήταν τοποθετημένοι ανά 10 m. Μόλις τελείωσαν τα έργα, ένας εργάτης που βρισκόταν στον πρώτο σηματοδότη, πήρε εντολή να μεταφέρει όλους τους σηματοδότες δίπλα στον τελευταίο. Όμως, λόγω του μεγάλου βάρους του σηματοδότη, ο εργάτης μπορούσε να μεταφέρει μόνο ένα κάθε φορά. Όταν τελείωσε την μεταφορά, είχε καλύψει συνολικά 1,44 km.

- α) Πόσες φορές έκανε τη διαδρομή από τον πρώτο έως τον τελευταίο σηματοδότη;
- β) Πόσες φορές έκανε τη διαδρομή από τον δεύτερο έως τον τελευταίο σηματοδότη;
- γ) Πόσοι ήταν οι σηματοδότες;

43. ** Ένας αθλητής μετά την αποθεραπεία του από ένα ατύχημα, άρχισε την Δευτέρα 19 Φεβρουαρίου 1996 νέες προπονήσεις. Ανάμεσα στις άλλες ασκήσεις έπρεπε να κάνει και κάμψεις (push ups) καθημερινά (ακόμα και τα Σάββατα και τις Κυριακές), σύμφωνα με το παρακάτω πρόγραμμα:

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	...
Αριθμός	9	13	17	21	...
Κάμψεων					

μέχρι να φθάσει τον αριθμό των 101 κάμψεων. Έπειτα θα συνέχιζε με 100 κάμψεις κάθε ημέρα εκτός Κυριακής.

- Πόσες κάμψεις θα έκανε την Τετάρτη της επόμενης εβδομάδας;
 - Μετά από πόσες μέρες έφθασε τις 101 κάμψεις;
 - Ποια ήταν η ημερομηνία της πρώτης Κυριακής που σταμάτησε τις κάμψεις;
44. Ένα παιδί παίζοντας με κύβους του 1 cm^3 έφτιαξε μια τετραγωνική πυραμίδα με 3 πατώματα. Το 1ο πάτωμα (η βάση) έχει επιφάνεια 25 cm^2 , το 2ο (το μεσαίο) έχει επιφάνεια 9 cm^2 και το 3ο (η κορυφή) αποτελείται από ένα μόνο κύβο. Αν το παιδί έφτιαχνε μια παρόμοια πυραμίδα με 10 πατώματα,
- πόσους κύβους θα περιείχε η βάση της;
 - πόσους κύβους θα είχε χρησιμοποιήσει;
 - Αν είχε στη διάθεσή του 220 κύβους, πόσα πατώματα θα είχε η πυραμίδα του;

