

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να σχηματίσετε τις γεωμετρικές προόδους με:

α) $a_1 = 5$ και $\lambda = 3$

β) $a_1 = \frac{2}{3}$ και $\lambda = \frac{1}{4}$

γ) $a_1 = -20$ και $\lambda = \frac{1}{2}$

2. * Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους αριθμούς 2, 16, 58 για να γίνουν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

3. * α) Αν $a_1 = 2$ και $\lambda = \frac{1}{3}$ να βρείτε τον a_6

β) Αν $a_6 = 448$ και $\lambda = 2$ να βρείτε τον a_1

γ) Αν $a_1 = 9$ και $a_5 = 144$ να βρείτε το λ

δ) Αν $a_1 = 2$ και $\lambda = 3$ και $a_n = 162$ να βρείτε το n

4. * Να βρείτε μία γεωμετρική πρόοδο, αν $a_4 = -6$ και $a_8 = -\frac{2}{27}$.

5. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $a_3 = 12$ και $a_8 = 384$, να βρείτε τον αριθμό λ .

6. * Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $a_1 = 8$ και $\lambda = \frac{1}{4}$

α) να βρείτε το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της S_4 και

β) το άθροισμα των άπειρων όρων της.

7. ** Στη γεωμετρική πρόοδο
- α) με $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{64}$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ να βρείτε το πλήθος n
- β) με $a_1 = -\frac{81}{4}$, $a_5 = -\frac{1}{4}$ να βρείτε τον λόγο λ
8. ** Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο, αν
- α) $a_4 - a_2 = 24$, $a_2 + a_3 = 6$
- β) $\frac{a_4}{a_6} = 4$ και $a_2 \cdot a_8 = \frac{1}{4}$
9. ** α) Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $a_4 = 13$, $a_6 = 117$ και $a_n = 9477$, να βρείτε το n .
- β) Να βρεθεί το πλήθος n των όρων μιας γεωμετρικής προόδου (a_n), αν έχουμε: $a_1 = 4$, $a_n = 972$ και $S_n = 1456$
10. ** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν άθροισμα 14 και γινόμενο 64.
11. ** Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν γινόμενο 16 και άθροισμα μεσαίων όρων 5.
12. ** Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν γινόμενο 625 και το τετράγωνο του τρίτου είναι τετραπλάσιο του γινομένου των δύο άκρων όρων.
13. ** Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των δύο πρώτων είναι 10 και το άθροισμα των δύο τελευταίων είναι 15.

14. ** Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδος αν ο έκτος όρος είναι τετραπλάσιος του τέταρτου όρου της και το άθροισμα του δεύτερου και του πέμπτου όρου της είναι 216.
15. ** Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, αν ξέρετε ότι ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο κατά 3 και ο τρίτος μικρότερος από τον τέταρτο κατά 12.
16. ** Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος 1, 3, 9, 27, 81.
 α) Να βρείτε τα γινόμενα $a_1 \cdot a_5$, $a_2 \cdot a_4$, a_3^2
 β) Να γενικεύσετε το συμπέρασμά σας
 γ) Ισχύει $2 \cdot 12 = 4 \cdot 6$. Η ακολουθία 2, 4, 6, 12 είναι γεωμετρική πρόοδος;
 δ) Τι συμπεραίνετε για το αντίστροφο του συμπεράσματος του (β);
17. ** α) Ποιο είναι το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της: - 1, 2, - 4, 8, ...;
 β) Πόσους διαδοχικούς πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε, για να πάρουμε άθροισμα 85;
18. ** Να βρείτε το S_4 στη γεωμετρική πρόοδο με $a_{10} = 48\sqrt{2}$, $a_7 = 24$.
19. ** Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο με $S_4 = 30$ και $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 480$.
20. * Να βρείτε τα αθροίσματα άπειρων όρων των παρακάτω γεωμετρικών προόδων
- α) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$
- β) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$
- γ) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$
- δ) $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots$

21. * Να βρείτε τον a_1 μιας γεωμετρικής προόδου, αν το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι 100 και ο $\lambda = \frac{1}{2}$.
22. * Να βρείτε το λόγο λ μιας γεωμετρικής προόδου, αν το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι 30 και το $a_1 = 10$.
23. ** Μιας γεωμετρικής προόδου με $|\lambda| < 1$ το άθροισμα S των άπειρων όρων της είναι $\frac{25}{4}$ και $a_1 + a_2 = 6$. Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και το λόγο λ .
24. ** Μια γεωμετρική πρόοδος a_1, a_2, a_3, \dots έχει $|\lambda| < 1$.
- α) Να αποδείξετε ότι $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$ είναι και αυτή γεωμετρική πρόοδος, να βρείτε το λόγο της και να δείξετε ότι είναι απολύτως μικρότερος του 1.
- β) Αν το άθροισμα των άπειρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με $|\lambda| < 1$ είναι 6 και το άθροισμα των άπειρων όρων των τετραγώνων τους είναι 18, να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.
25. ** Να βρείτε την γεωμετρική πρόοδο (a_n) , εάν
- α) $\frac{S_{10}}{S_5} = 32, a_1 = 2$
- β) $S_3 = 26$ και η διαφορά $a_4 - a_1 = 52$.
26. ** Να βρείτε το άθροισμα $\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^3} + \dots$, αν v φυσικός με $v \geq 2$.

27. ** Να βρείτε τα αθροίσματα:

α) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} + \dots$

β) $6 - 1 + 3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - \frac{27}{64} + \dots$

γ) $\frac{2}{5} + 1 + \frac{4}{25} - \frac{1}{2} + \frac{8}{125} + \frac{1}{4} + \frac{16}{625} - \frac{1}{8} + \dots$

δ) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^4} + \dots$

28. *** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^x = 2046$

β) $1 + x + x^2 + \dots = 5$ με $0 < x < 1$

γ) $1 + \sin x + \sin^2 x + \dots = 2$ με $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

29. ** Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο, αν a_μ και a_k είναι οι όροι της τάξεως μ και k αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει: $a_\mu = \lambda^{\mu-k} a_k$, $\mu, k \in \mathbb{N}$

30. ** α) Σε μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$. Να βρεθεί ο λόγος της.

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να απλοποιήσετε την παράσταση: $\Pi = (\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2 - (\alpha - \delta)^2$

31. ** Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 3 \cdot 2^n$.

α) Να βρείτε τον όρο a_{n+1} .

β) Να αποδείξετε ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το λόγο λ και τον πρώτο της όρο a_1 .

γ) Ποιος όρος της είναι ίσος με 3072;

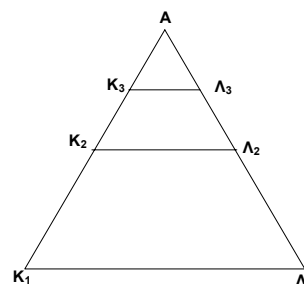
32. ** Δίνεται η ακολουθία με $S_n = 2(3^n - 1)$

α) Να βρείτε το S_{n-1}

- β) Να βρείτε το α_v
 γ) Να βρείτε το α_{v+1}
 δ) Να αποδείξετε ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον λ και τον α_1 .
 ε) Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε, για να έχουμε άθροισμα 484;

33. ** Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AK_1\Lambda_1$ είναι ισόπλευρο πλευράς a .

K_2 είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AK_1
 Λ_2 είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $A\Lambda_1$
 K_3 είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AK_2
 Λ_3 είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $A\Lambda_2$
 Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες:



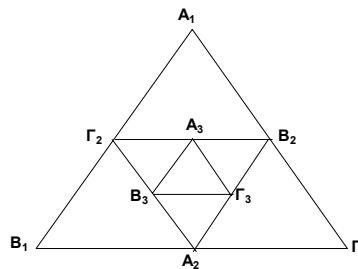
α)

Τρίγωνο	Πλευρά	Περίμετρος
$AK_1\Lambda_1$	$\alpha_1 = a$	$\Pi_1 =$
$AK_2\Lambda_2$	$\alpha_2 =$	$\Pi_2 =$
$AK_3\Lambda_3$	$\alpha_3 =$	$\Pi_3 =$
	\vdots	\vdots
$AK_v\Lambda_v$	$\alpha_v =$	$\Pi_v =$

β) Εφαρμογή

Τρίγωνο	Πλευρά	Περίμετρος
$AK_1\Lambda_1$	$\alpha_1 = 8$ μέτρα	$\Pi_1 =$
$AK_2\Lambda_2$	$\alpha_2 =$	$\Pi_2 =$
$AK_3\Lambda_3$	$\alpha_3 =$	$\Pi_3 =$
\vdots	\vdots	\vdots
$AK_p\Lambda_p$	$\alpha_p =$	$\Pi_p < 1$ και $\Pi_{p+1} \geq 1$ μέτρο
	M	M
$AK_8\Lambda_8$	$\alpha_8 =$	$\Pi_8 =$

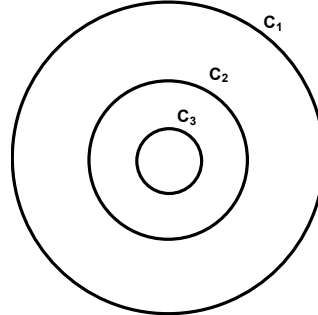
34. ** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς α . Σχηματίζουμε το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$, όπου A_2, B_2, Γ_2 τα μέσα των πλευρών του $A_1B_1\Gamma_1$. Σχηματίζουμε το τρίγωνο $A_3B_3\Gamma_3$, όπου A_3, B_3, Γ_3 τα μέσα των πλευρών του $A_2B_2\Gamma_2$.



Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

	Πλευρά	Εμβαδόν	Περίμετρος
$A_1B_1\Gamma_1$	$\alpha_1 = \alpha$	$E_1 =$	$\Pi_1 =$
$A_2B_2\Gamma_2$	$\alpha_2 =$	$E_2 =$	$\Pi_2 =$
$A_3B_3\Gamma_3$	$\alpha_3 =$	$E_3 =$	$\Pi_3 =$
...
$A_{10}B_{10}\Gamma_{10}$	$\alpha_{10} =$	$E_{10} =$	$\Pi_{10} =$
...
Αθροίσματα S απείρων όρων	$S_{\pi\lambda} =$	$S_E =$	$S_{\Pi} =$

35. ** Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος c_1 έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο K . Οι ομόκεντροί του κύκλοι c_2 και c_3 έχουν ακτίνα $\frac{R}{2}$ και $\frac{R}{4}$ αντιστοίχως. Αν συνεχίσουμε με την ίδια διαδικασία να κατασκευάζουμε κύκλους (κάθε επόμενος να είναι ομόκεντρος του προηγούμενου του και να έχει τη μισή ακτίνα απ' αυτόν).



- i) Να βρείτε, συναρτήσει του R , την ακτίνα των c_5, c_6
 - ii) Να βρείτε το μήκος του κύκλου c_7
 - iii) Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου c_{12}
 - iv) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των 5 πρώτων κύκλων
 - v) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των απείρων κύκλων που σχηματίζονται με τον παραπάνω τρόπο.
36. ** Ένας ασθενής παίρνει δόση των 10 mg ενός φαρμάκου κάθε 4ωρο. Στο χρονικό αυτό διάστημα διασπάται το $\frac{1}{4}$ της ποσότητας του φαρμάκου που βρίσκεται στην αρχή του 4ώρου στο αίμα του ασθενούς ενώ το υπόλοιπο παραμένει στο αίμα του ασθενούς.
- α) Να βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής μόλις πάρει την 2^η δόση του φαρμάκου.
 - β) Να βρείτε την ποσότητα του φαρμάκου που έχει στο αίμα του ο ασθενής στο τέλος του πρώτου 12ώρου.
 - γ) Αν είναι γνωστό ότι, όταν η ποσότητα του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς υπερβεί τα 50 mg, παρουσιάζονται επικίνδυνες παρενέργειες, δείξτε ότι ο ασθενής δεν κινδυνεύει ακόμη και με ισόβια λήψη του φαρμάκου.
 - δ) Ποια είναι η ποσότητα της επικίνδυνης δόσης.

37. ** Ένα αυτοκίνητο κοστίζει σήμερα 10.000.000 δρχ. Είναι γνωστό ότι στο τέλος κάθε χρόνου χάνει το $\frac{1}{10}$ της αξίας που έχει στην αρχή του χρόνου.

I. Τότε

- | | | |
|---|----------|----------|
| i) Η αξία του αυτοκινήτου στο τέλος του πρώτου χρόνου είναι 9.500.000 δρχ. | Σ | Λ |
| ii) Οι αξίες στο τέλος κάθε χρόνου είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{10}$ | Σ | Λ |
| iii) Μετά την συμπλήρωση 2 χρόνων από την αγορά του η αξία του αυτοκινήτου μειώθηκε κατά 2.000.000 δρχ. | Σ | Λ |
| iv) Η αξία του είναι μεγαλύτερη από 5.000.000 δρχ. στο τέλος του 5 ^{ου} χρόνου από την αγορά του | Σ | Λ |
| v) Η αξία του είναι μικρότερη από 4.000.000 δρχ. στο τέλος του 8 ^{ου} χρόνου από την αγορά του | Σ | Λ |

II. i) Η αξία του αυτοκινήτου στην αρχή του 3^{ου} χρόνου από την αγορά του είναι:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| A. 7.000.000 δρχ. | B. 7.200.000 δρχ. | Γ. 7.290.000 δρχ. |
| Δ. 8.000.000 δρχ. | E. 8.100.000 δρχ. | |

ii) Με την συμπλήρωση 3 χρόνων από την αγορά του η αξία του μειώθηκε κατά

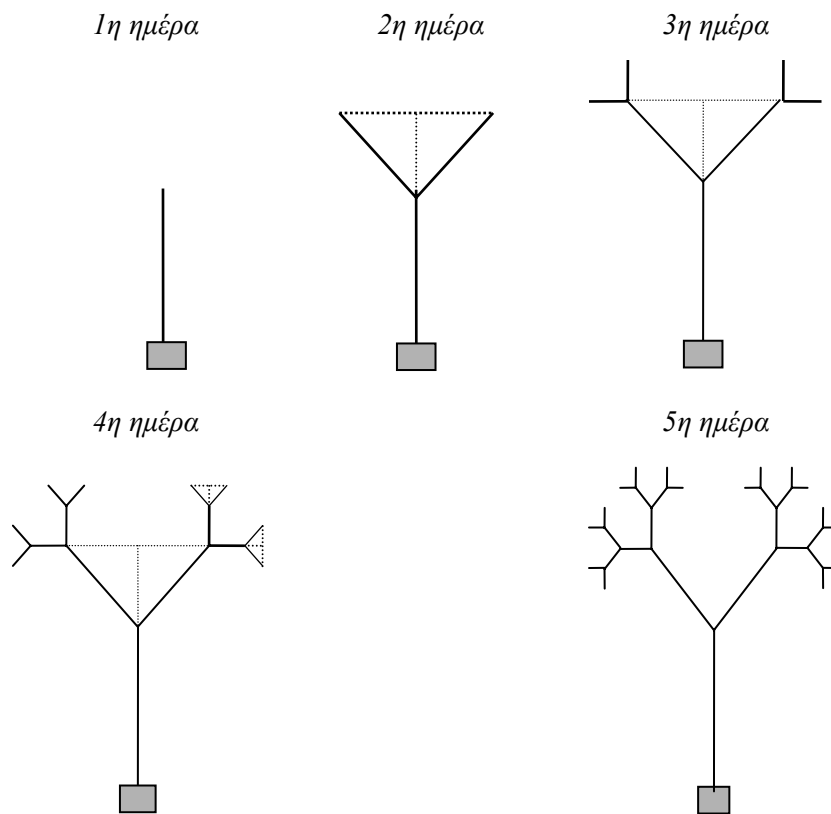
- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| A. 4.000.000 δρχ. | B. 3.200.000 δρχ. | Γ. 2.710.000 δρχ. |
| Δ. 1.900.000 δρχ. | E. 1.710.000 δρχ. | |

iii) Η αξία του αυτοκινήτου γίνεται μικρότερη από 6.000.000 δρχ. στο τέλος του

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| A. 3 ^{ου} χρόνου | B. 4 ^{ου} χρόνου | Γ. 5 ^{ου} χρόνου |
| Δ. 6 ^{ου} χρόνου | E. 7 ^{ου} χρόνου | |

38. ** α) Να συγκρίνετε τον αριθμητικό και τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών:
2, 8.
β) Δείξτε ότι η σχέση που θα βρείτε ισχύει γενικά για κάθε ζεύγος θετικών x, y .
39. ** Αν α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε να αποδείξετε ότι οι $\frac{1}{\alpha - \beta}, \frac{1}{\alpha - \gamma}, \frac{1}{\alpha + \beta}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
40. ** Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς, για τους οποίους ισχύουν τα εξής:
i) είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου
ii) αν αυξηθεί ο δεύτερος κατά 8, η πρόοδος γίνεται αριθμητική
iii) αν αυξηθεί και ο τρίτος κατά 64, γίνεται πάλι γεωμετρική.
41. ** Να βρείτε τρεις αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:
i) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
ii) έχουν άθροισμα 15
iii) αν σ' αυτούς προσθέσουμε τους αριθμούς 1, 4, 19 αντίστοιχα θα γίνουν διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
42. ** Να βρείτε τρεις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:
i) είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου
ii) ελαττώνοντας τον τρίτο κατά 4 γίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
iii) ελαττώνοντας τον δεύτερο και τον τρίτο της αριθμητικής προόδου κατά 1 σχηματίζεται πάλι γεωμετρική πρόοδος.
43. ** Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν τα εξής:
i) οι τρεις πρώτοι είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου
ii) οι τρεις τελευταίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
iii) το άθροισμα των άκρων όρων είναι 14 και των μεσαίων 12.

44. *** Το απειρόδενδρο είναι ένα φυτό εσωτερικού χώρου που μεγαλώνει με ένα παράξενο τρόπο. Την 1η μέρα υψώνεται κατά 1m. Τη 2η αναπτύσσονται δυο νέα κλαδιά, μήκους $\frac{1}{2}$ m το καθένα, κάθετα μεταξύ τους. Την επομένη μέρα εμφανίζονται σε κάθε άκρο δυο νέα κλαδιά, κάθετα μεταξύ τους και μισά σε μήκος από τα κλαδιά που είχαν εμφανιστεί την προηγούμενη μέρα (δηλ. μήκους $\frac{1}{4}$ m το καθένα). Και αυτό συνεχίζεται καθημερινά (βλ. σχήμα).



Είναι δυνατό ένα τέτοιο δένδρο να χωρέσει στο σαλόνι σας, χωρίς να εμποδίζεται η ανάπτυξη του λόγω χώρου;

45. ** Ο Πέτρος γιορτάζοντας τα 12^α γενέθλιά του, ζήτησε από τους γονείς του για δώρο 15.000 και κάθε επόμενα γενέθλια να του αυξάνουν το ποσό κατά 3.000 μέχρι να γιορτάσει τα 21 χρόνια του.

Ο πατέρας του αντιπρότεινε τα εξής: “Θα σου δώσω τώρα 500 δρχ. και κάθε επόμενα γενέθλιά σου θα σου διπλασιάζω το προηγούμενο ποσό”. Ο Πέτρος σκέφτηκε λίγο και απέρριψε τη πρόταση του πατέρα του πιστεύοντας ότι όταν θα γιορτάζει τα 18^α γενέθλιά του με τη δική του πρόταση θα πάρει περισσότερα χρήματα.

- α) Δικαιολογήσετε γιατί συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη του Πέτρου.
- β) Πόσα χρήματα θα πάρει με τη δική του πρόταση έως και τα 21^α γενέθλιά του και πόσα θα έπαιρνε με την πρόταση του πατέρα του;

