

**ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ**  
**ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ**  
**(Κεφάλαιο 4ο: Εκθετική -**  
**Λογαριθμική Συνάρτηση)**

*Τα κριτήρια αξιολόγησης που ακολουθούν είναι ενδεικτικά.  
Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα διαμόρφωσής τους σε  
ενιαία θέματα, επιλογής ή τροποποίησης των θεμάτων,  
ανάλογα με τις διδακτικές ανάγκες του συγκεκριμένου  
τμήματος στο οποίο απευθύνεται.*

*1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή*

**Διδακτική Ενότητα: Εκθετική - Λογαριθμική Συνάρτηση**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Η εκθετική συνάρτηση με τύπο  $f(x) = a^x$  με  $0 < a \neq 1$  έχει πεδίο ορισμού

- A.** το διάστημα  $[0, +\infty)$       **B.** το διάστημα  $(0, +\infty)$   
**Γ.** το σύνολο  $\mathbb{R}$       **Δ.** το σύνολο  $\mathbb{R} - \{1\}$       **Ε.** το σύνολο  $\mathbb{R}^*$

**B.** Η εκθετική συνάρτηση με τύπο  $f(x) = a^x$  με  $0 < a \neq 1$  έχει σύνολο τιμών

- A.** το διάστημα  $[0, +\infty)$       **B.** το διάστημα  $(-\infty, 0]$   
**Γ.** το διάστημα  $(-\infty, 0)$       **Δ.** το διάστημα  $(0, +\infty)$       **Ε.** Το σύνολο  $\mathbb{R}^*$

**Γ.** Το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο  $f(x) = \log_a x$  με  $0 < a \neq 1$  είναι

- A.** Το διάστημα  $[0, +\infty)$       **B.** Το σύνολο  $\mathbb{R}$       **Γ.** Το διάστημα  $(0, +\infty)$   
**Δ.** Το σύνολο  $\mathbb{R}^*$       **Ε.** Το σύνολο  $\mathbb{R} - \{1\}$

**Δ.** Το σύνολο τιμών της λογαριθμικής συνάρτησης με τύπο  $f(x) = \log_a x$  με  $0 < a \neq 1$  είναι

- A.** Το διάστημα  $[0, +\infty)$       **B.** Το σύνολο  $\mathbb{R}$       **Γ.** Το διάστημα  $(0, +\infty)$   
**Δ.** Το διάστημα  $(-\infty, 0)$       **Ε.** Το διάστημα  $(-\infty, 0]$

**Ε.** Η λογαριθμική συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \log_a x$  με  $0 < a \neq 1$  έχει γραφική παράσταση που τέμνει

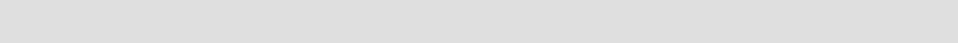
- A.** μόνο τον άξονα  $y'y$       **B.** τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $(1, 0)$   
**Γ.** τον άξονα  $x'x$  και τον άξονα  $y'y$       **Δ.** τον άξονα  $x'x$  σε δύο σημεία  
**Ε.** τίποτα από τα παραπάνω

**ΘΕΜΑ 2ο**

**A.** Να λύσετε την εξίσωση:  $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

**B. α)** Να υπολογίσετε τον αριθμό  $100^{\log\sqrt{3}}$

**β)** Να λύσετε την εξίσωση:  $3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log\sqrt{3}} = 0$



**2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή**  
**Διδακτική Ενότητα: Εκθετική - Λογαριθμική Συνάρτηση**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Αν  $0 < a \neq 1$  και  $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

**α)**  $\log_a(\vartheta_1 \cdot \vartheta_2) = \log_a \vartheta_1 + \log_a \vartheta_2$  και

**β)**  $\log_a \vartheta^k = k \log_a \vartheta, k \in \mathbb{R}$

**B. α)** Η παράσταση  $\log 2 + \log 7$  είναι ίση με

**A.**  $\log 9$       **B.**  $\log 14$       **Γ.**  $\log \frac{7}{2}$       **Δ.**  $\log 5$       **E.**  $2 \log 7$

**β)** Η παράσταση  $\log 2^3$  είναι ίση με

**A.**  $\log 6$       **B.**  $\log 5$       **Γ.**  $2 \log 3$       **Δ.**  $3 \log 2$

**E.** κανένα από τα προηγούμενα

**γ)** Αν  $\log 50 + \log 2 = \log x$  τότε το  $x$  είναι ίσο με

**A.** 100      **B.** 25      **Γ.** 52      **Δ.** 10      **E.** 2

**δ)** Η συνάρτηση  $f(x) = \log(x - 6) + \log(x - 7)$  ορίζεται αν

**A.**  $x = 6$       **B.**  $x < 6$       **Γ.**  $x > 7$       **Δ.**  $x = 7$       **E.**  $6 < x < 7$

**ε)** Αν  $\log[\log(x - 2)] = 0$  τότε το  $x$  είναι ίσο με

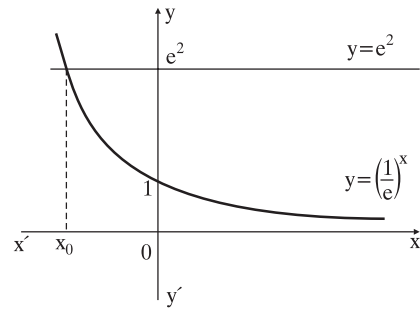
**A.** 12      **B.** 2      **Γ.** 3      **Δ.** 4      **E.** 10

**ΘΕΜΑ.2ο**

A. Να βρείτε το ( $a \neq 5$ ) ώστε η  $f(x) = \left(\frac{1-a}{a-5}\right)^x$  να είναι γνησίως αύξουσα.

B. Να βρείτε το  $x_0$  (που είναι η τετμημένη του κοινού σημείου της ευθείας  $y = e^2$  και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x .)$$



**1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή  
στην ΑΛΓΕΒΡΑ (επαναληπτικό)  
(διάρκεια: 3 ώρες)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A. α)** Τα πολυώνυμα  $P(x) = a_\mu x^\mu + \dots + a_1x + a_0$  και  $q(x) = \beta_\nu x^\nu + \dots + \beta_1x + \beta_0$  με  $\mu \geq \nu$  τότε λέμε ότι είναι ίσα;

**β)** Αποδείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x - \rho$  είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για  $x = \rho$ . Είναι δηλαδή  $v = P(\rho)$ .

**γ)** Έστω η πολυωνυμική εξίσωση  $a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$  με ακεραίους συντελεστές. Αν ο ακέραιος  $\rho \neq 0$  είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε αποδείξτε ότι ο  $\rho$  είναι διαιρέτης του σταθερού όρου  $a_0$ .

**B. α)** Τα πολυώνυμα  $P(x) = x^3 - \beta x + 5$  και  $q(x) = x^3 + \beta x^2 + 5 - \beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  είναι ίσα όταν ο  $\beta$  ισούται με

**A.** - 1                      **B.** 0                      **Γ.** 1                      **Δ.** 5                      **E.** - 5

**β)** Αν τα πολυώνυμα

$P(x) = \lambda^{\nu+1}x^\nu + (2\lambda - 3)x^2 + x - 1$  και  $q(x) = \lambda x^{1998} - 3x^2 + x - (\lambda + 1)$  είναι ίσα, τότε ο πραγματικός αριθμός  $\lambda$  ισούται με

**A.** 1                      **B.** - 1                      **Γ.** 0                      **Δ.** 1998

**E.** κάθε πραγματικό αριθμό

**γ)** Το πολυώνυμο  $P(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 5$  το διαιρούμε το διώνυμο  $x - \rho$ . Αν  $v$  το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης, τότε ισχύει ότι

**A.**  $v > 0$                       **B.**  $v < 0$                       **Γ.**  $v = 0$                       **Δ.**  $v \leq 0$                       **E.**  $v = - 5$

δ) Το πολυώνυμο  $P(x) = (x - 1)^{2000} + x - 3$  το διαιρούμε το διώνυμο  $x - 1$ .

Το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι

A. 0                      B. - 3                      Γ. 3                      Δ. - 2                      Ε. 2

ε) Η εξίσωση  $x^3 - 5x^2 + κx + 2 = 0$ ,  $κ \in \mathbb{Z}$ , αποκλείεται να έχει ρίζα τον αριθμό

A. - 1                      B. 1                      Γ. - 2                      Δ. 2                      Ε. 3

### ΘΕΜΑ 2ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Α είναι  $120^\circ$ .

α) Να δείξετε ότι  $a^2 - βγ = β^2 + γ^2$ .

β) Αν  $α = \sqrt{3}$  και  $β = \sqrt{2}$ , να βρείτε τις γωνίες Β και Γ.

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$ .

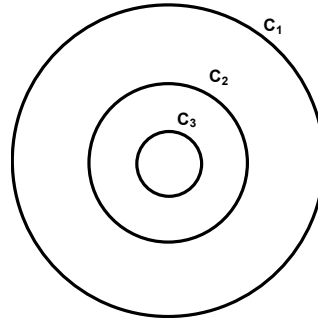
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι  $f\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right) = f(\alpha) + f(\beta)$ .



**ΘΕΜΑ 4ο**

Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος  $c_1$  έχει ακτίνα  $R$  και κέντρο το σημείο  $K$ . Οι ομόκεντροί του κύκλοι  $c_2$  και  $c_3$  έχουν ακτίνα  $\frac{R}{2}$  και  $\frac{R}{4}$  αντιστοίχως. Αν συνεχίσουμε με την ίδια διαδικασία να κατασκευάζουμε κύκλους (κάθε επόμενος να είναι ομόκεντρος του προηγούμενου του και να έχει τη μισή ακτίνα απ' αυτόν).



- α) Να βρείτε, συναρτήσει του  $R$ , την ακτίνα των  $c_5, c_6$
- β) Να βρείτε το μήκος του κύκλου  $c_7$
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου  $c_{12}$
- δ) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των 5 πρώτων κύκλων
- ε) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των απείρων κύκλων που σχηματίζονται με τον παραπάνω τρόπο.

**2ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή**  
**στην ΑΛΓΕΒΡΑ (επαναληπτικό)**  
**(διάρκεια: 3 ώρες)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A. α)** Να συμπληρώσετε τις ισότητες: ( $0 < \alpha \neq 1$  και  $\theta, \theta_1, \theta_2 > 0$ )

$$\log_{\alpha} \alpha^x = \dots\dots\dots \quad \log_{\alpha} 1 = \dots\dots\dots$$

$$\log_{\alpha} \alpha = \dots\dots\dots \quad \alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \dots\dots\dots$$

$$\log_{\alpha} (\theta_1 \theta_2) = \dots\dots\dots$$

**β)** Αν  $0 < \alpha \neq 1, \theta > 0$  και  $\kappa \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε την ισότητα:  $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$ .

**B. α)** Η παράσταση  $\log 2 + \log 7$  είναι ίση με

- A.  $\log 9$     B.  $\log 14$     Γ.  $\log \frac{7}{2}$     Δ.  $\log 5$     E.  $2 \log 7$

**β)** Η παράσταση  $\log 12 - \log 3$  είναι ίση με

- A.  $\log 9$     B.  $\log 15$     Γ.  $\log 36$     Δ.  $12 \log 3$     E.  $\log 4$

**γ)** Η παράσταση  $\log 2^3$  είναι ίση με

- A.  $\log 6$     B.  $\log 5$     Γ.  $2 \log 3$     Δ.  $3 \log 2$   
 E. τίποτα από τα προηγούμενα

**δ)** Η παράσταση  $3^{\log_3 5}$  είναι ίση με

- A. 5    B.  $\log 5$     Γ. 3    Δ.  $\log 3$     E. 0

**ε)** Η παράσταση  $\frac{1}{2} \log 25 + \frac{1}{3} \log 8$  είναι ίση με

- A.  $\frac{1}{6}$     B.  $\frac{1}{6} \log 200$     Γ.  $\frac{5}{6} \log 34$     Δ. 1    E.  $\log 200$

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η εξίσωση  $x^5 + x^4 + κx + λ = 0$ .

- α) Να προσδιορίσετε τα  $κ, λ ∈ ℝ$  ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το  $(x + 1)^2$ .
- β) Για τις τιμές των  $κ, λ$  που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι  $a_n = 3n + 2$ .

- α) Να βρείτε τον επόμενο όρο  $a_{n+1}$ .
- β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία  $(a_n)$  είναι αριθμητική πρόοδος.
- γ) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της.
- δ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Ένας φωτογράφος προετοιμάζοντας μια φωτογράφιση μέσα στο στούντιο τοποθέτησε τρεις προβολείς εδάφους στα σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε:

$$\gamma_{\omega n A} = 120^\circ, \quad B\Gamma = 5,19 \text{ m} \quad \text{και} \quad AB = 3 \text{ m}.$$

- α) Επειδή ο φωτισμός, όταν οι  $\gamma_{\omega n \Gamma}$  και  $\gamma_{\omega n B}$  είναι μεγαλύτερες από  $35^\circ$  δεν επιτρέπει την σωστή φωτογράφιση, ελέγξτε αν ο φωτογράφος έστησε σωστά τους προβολείς υπολογίζοντας τις γωνίες Β και Γ.
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΓ.
- γ) Ο φωτογράφος επιλέγει να τοποθετήσει το κέντρο του θέματος της φωτογράφισης σ' ένα σημείο που δέχεται τον ίδιο φωτισμό και από τους τρεις προβολείς. Πόσο θα απέχει το σημείο αυτό από κάθε προβολέα;

(Δίνεται  $\sqrt{3} = 1,73$  και ότι οι προβολείς έχουν την ίδια φωτεινότητα).