

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. i. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΓ, με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος, έχουμε:

$$AH^2 = AG^2 - HG^2 = 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45.$$

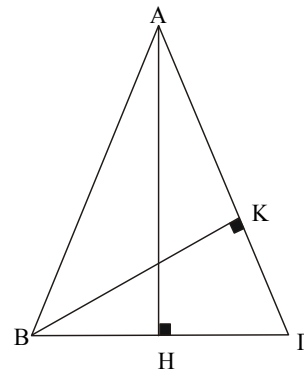
$$\text{Άρα } AH = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ cm.}$$

- ii. Για το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$(AB\Gamma) = \frac{BG \cdot AH}{2} = \frac{AG \cdot BK}{2}, \text{ άρα}$$

$$BK = \frac{BG \cdot AH}{AG}$$

$$BK = \frac{4 \cdot 3\sqrt{5}}{7} = \frac{12\sqrt{5}}{7} \text{ cm}$$



2. i. Υπολογισμός της πλευράς ΑΒ:

$$\text{Έχουμε: } AB + AG = 2 + \sqrt{2} \text{ ή}$$

$$AB + AB \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$AB (1 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$$

$$AB = \frac{(2 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}}$$

$$AB = \frac{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}$$

$$AB = \frac{(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1}$$

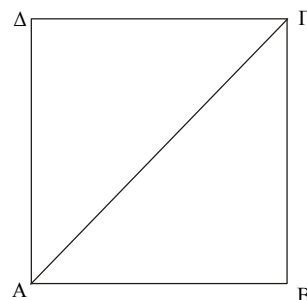
$$AB = (2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}$$

- ii. Υπολογισμός της πλευράς ΑΓ:

$$\text{Από την αρχική σχέση έχουμε: } AB + AG = 2 + \sqrt{2} \text{ ή } AG = 2 + \sqrt{2} - AB$$

$$\text{Άρα } AG = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$AG = 2$$



3. Είναι $ZO \perp AB$, $OH \perp AG$

$$ZO = OH = 4 \text{ cm}, AZ = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Άρα } BZ = 12 \text{ cm}, \text{ άρα } B\Theta = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Αν } \Theta\Gamma = x, \text{ τότε } H\Gamma = x$$

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου
 Θεωρήματος στο τρίγωνο $AB\Gamma$ και με
 δεδομένο ότι $AB = 16$, $A\Gamma = 4 + x$, $B\Gamma =$
 $x + 12$,
 έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$$

$$16^2 + (4 + x)^2 = (x + 12)^2$$

$$256 + 16 + 8x + x^2 = x^2 + 24x + 144$$

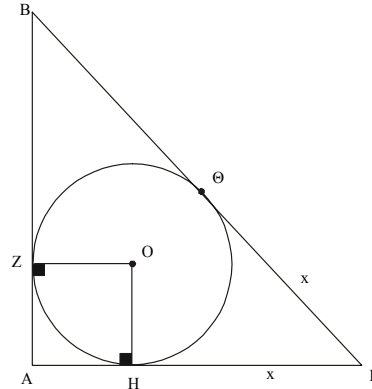
$$24x - 8x = 256 + 16 - 144$$

$$16x = 128$$

$$x = \frac{128}{16}, \text{ άρα } x = 8$$

$$\text{Άρα i. } B\Gamma = 8 + 12 = 20 \text{ cm}$$

$$\text{ii. } A\Gamma = 4 + 8 = 12 \text{ cm}$$



4. i. Αν α η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου,
 με εφαρμογή του Πυθαγορείου
 θεωρήματος στο τρίγωνο $AH\Gamma$ έχουμε:

$$AH = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

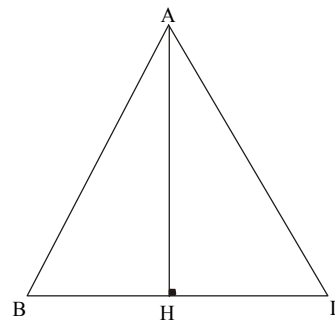
$$\text{Άρα η σχέση } B\Gamma - AH = 12 \text{ cm γράφεται}$$

$$\alpha - \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = 12. \text{ Άρα:}$$

$$\alpha \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 12 \text{ ή } \alpha = \frac{12}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\text{Άρα } \alpha = 24(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}$$

$$\text{ii. } v = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}. \text{ Άρα } v = \frac{24(2 + \sqrt{3})\sqrt{3}}{2} = 12(2 + \sqrt{3})\sqrt{3} \text{ cm} =$$



$$12(2\sqrt{3} + 3) \text{ cm.}$$

$$5. (5\beta)^2 + (5\gamma)^2 = 25\beta^2 + 25\gamma^2 = 25(\beta^2 + \gamma^2) = 25a^2 = (5a)^2$$

Άρα το τρίγωνο με πλευρές $5a$, 5β , 5γ είναι ορθογώνιο.

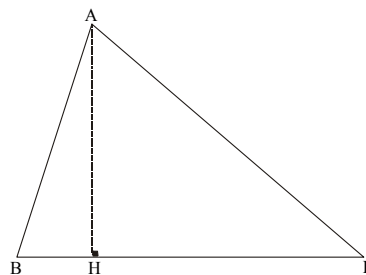
6. Έστω $AG > AB$. Φέρνουμε το ύψος AH και έχουμε:

$$AG^2 - AB^2 = (AH^2 + HG^2) - (AH^2 + BH^2) = HG^2 - HB^2$$

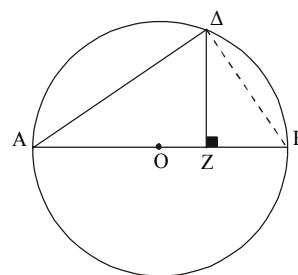
Σημείωση:

Τρίγωνο AHG ορθογώνιο, άρα $AG^2 = AH^2 + HG^2$

Τρίγωνο AHB ορθογώνιο, άρα $AB^2 = AH^2 + HB^2$



7. Πρέπει να δείξουμε ότι $AD^2 = AB \cdot AZ$. Φέρνουμε την ΔB . Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ορθογώνιο στο Δ . Άρα από το $A\Delta B$ τρίγωνο, έχουμε: $AD^2 = AB \cdot AZ$ (Το τετράγωνο μιας καθέτου πλευράς ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πάνω στην υποτείνουσα).



8. Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ορθογώνιο, άρα $AB^2 = AD^2 + BD^2$

Το τρίγωνο $B\Delta \Gamma$ είναι ορθογώνιο, άρα

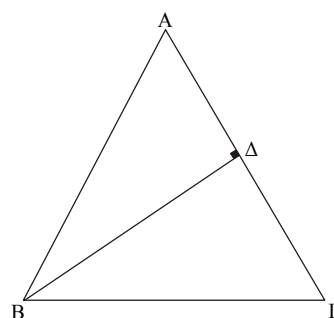
$$B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$$

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, άρα

$$AG^2 = AB^2 = AD^2 + BD^2$$

Άρα

$$AB^2 + B\Gamma^2 + AG^2 = AD^2 + BD^2 + B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 + AD^2 + BD^2 = \Gamma\Delta^2 + 2AD^2 + 3B\Delta^2$$



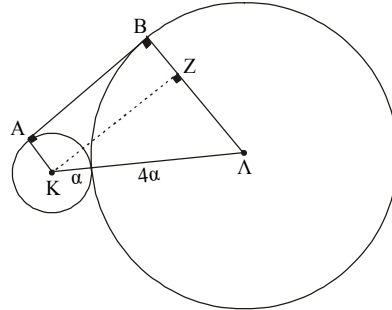
9. i. $\left. \begin{array}{l} AK \perp AB \\ BL \perp AB \end{array} \right\}, \text{ άρα } AK \parallel BL, \text{ άρα}$

$ABLK$ τραπέζιο

- ii. Φέρνουμε $KZ \parallel AB$, $KZ = AB$
($AKZB$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο). Το τρίγωνο $KZ\Lambda$ είναι ορθογώνιο στο Z . Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$KZ^2 = K\Lambda^2 - Z\Lambda^2 \text{ ή } KZ^2 = (5\alpha)^2 - (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 - 9\alpha^2 = 16\alpha^2$$

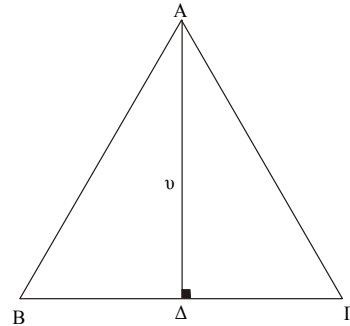
$$KZ = 4\alpha, KZ = AB = 4\alpha$$



10. Το $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά α .

i. $v = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (ύψος ισοπλεύρου τριγώνου)

ii. $v' = \frac{v\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ ή } v' = \frac{3\alpha}{4}$



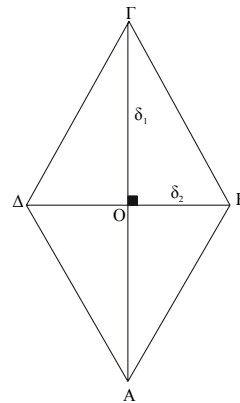
11. Έστω $AG = \delta_1$, $B\Delta = \delta_2$ και $B\Gamma = \frac{84}{4} = 21$ cm

Ισχύει: $\delta_2 = \frac{3}{5} \delta_1$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BO\Gamma$ έχουμε:

$$\left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 = 21^2 \quad (2)$$

Με λύση του συστήματος των (1) και (2) έχουμε:



$$\left(\frac{\frac{3}{5}\delta_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2 = 21^2 \quad \text{ή} \quad \frac{9}{25} \delta_1^2 + \delta_1^2 = 441 \cdot 4 \quad \text{ή} \quad \frac{34}{25} \delta_1^2 = 1764$$

$$34\delta_1^2 = 25 \cdot 441 \cdot 4$$

$$\delta_1^2 = \frac{25 \cdot 441 \cdot 4}{34}$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{25 \cdot 441 \cdot 4}{34}} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 21}{34} \sqrt{34} \text{ cm}$$

$$\text{Άρα } \delta_2 = \frac{3}{5} \delta_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{5 \cdot 2 \cdot 21}{34} \sqrt{34} = \frac{\sqrt{34} \cdot 126}{34} = \frac{63\sqrt{34}}{17} \text{ cm}$$

12. i. Φέρνουμε $BE \perp \Gamma\Delta$.

Η ευθεία MN διέρχεται και από το μέσον της πλευράς ΑΔ.

$$\text{Άρα } ZM = \frac{\Delta\Gamma}{2}, ZN = \frac{AB}{2} \text{ και}$$

$$MN = ZM - ZN, \text{ άρα}$$

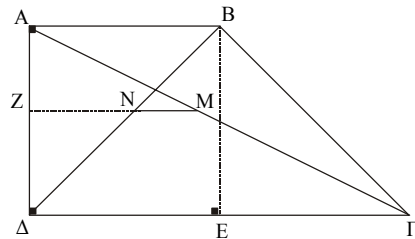
$$MN = \frac{\Delta\Gamma - AB}{2} = \frac{\Delta\Gamma - \Delta E}{2} = \frac{E\Gamma}{2} \quad (1)$$

ii. Από το ορθογώνιο τρίγωνο BEΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 = A\Delta^2 + E\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad B\Gamma^2 - A\Delta^2 = E\Gamma^2 \quad (2)$$

$$\text{Από την (1) έχουμε: } E\Gamma = 2MN \quad \text{ή} \quad E\Gamma^2 = 4MN^2 \quad (3)$$

$$\text{Από (2) και (3) έχουμε: } B\Gamma^2 - A\Delta^2 = 4MN^2$$



13. i. Από την ισότητα των ορθογώνιων τριγώνων KZN , ΛHM έχουμε $ZN = HM$.

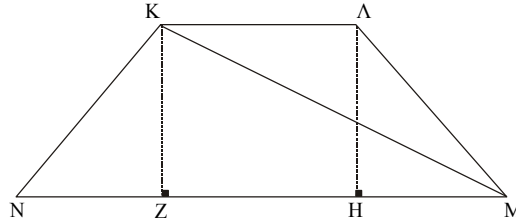
- ii. Από τα ορθογώνια τρίγωνα KZM , KZN έχουμε:

$$KM^2 = KZ^2 + ZM^2 \quad (1)$$

$$KN^2 = KZ^2 + ZN^2 \quad (2)$$

Με αφαίρεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:

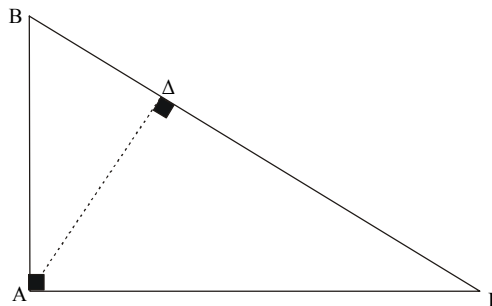
$$KM^2 - KN^2 = ZM^2 - ZN^2 = (ZM + ZN)(ZM - ZN) = MN \cdot ZH = NM \cdot K\Lambda$$



14. $AB = \frac{3}{4} AG$, άρα $\frac{AB}{AG} = \frac{3}{4}$

Αλλά $\frac{(AB)^2}{(AG)^2} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$, άρα

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$



15. i. Το ΔK είναι ύψος στο ορθογώνιο τρίγωνο $BK\Gamma$.

$$\text{Άρα } \Delta K^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$$

- ii. Αρκεί να δείξουμε

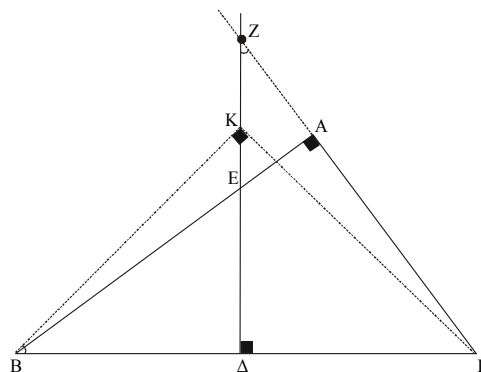
$$\Delta B \cdot \Delta \Gamma = \Delta Z \cdot \Delta E \quad \text{ή}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta E} = \frac{\Delta Z}{\Delta \Gamma}$$

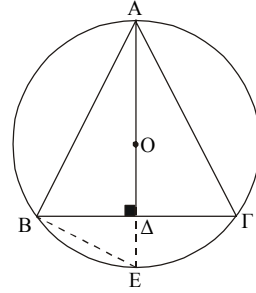
Τα τρίγωνα $B\Delta E$, $Z\Delta\Gamma$ είναι

ορθογώνια και $\hat{E} \hat{B} \Delta = \hat{\Delta} \hat{Z} \Gamma$
(έχουν κάθετες πλευρές).

$$\text{Συνεπώς } B \hat{\Delta} E \approx Z \hat{\Delta} \Gamma. \quad \text{Άρα } \Delta B \cdot \Delta \Gamma = \Delta Z \cdot \Delta E$$



16. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $B\Gamma = A\Delta = 8$ cm. Το κέντρο του περιγεγραμμένου του κύκλου είναι πάνω στην $A\Delta$. Προεκτείνουμε την $A\Delta$ και έστω E το σημείο τομής της με τον περιγεγραμμένο κύκλο. Φέρουμε την BE . Από το ορθογώνιο τρίγωνο ABE έχουμε $B\Delta^2 = A\Delta \cdot \Delta E$. Αλλά $\Delta E = AE - A\Delta = 2R - 8$. Άρα $4^2 = 8(2R - 8)$. Άρα $R = 5$ cm.

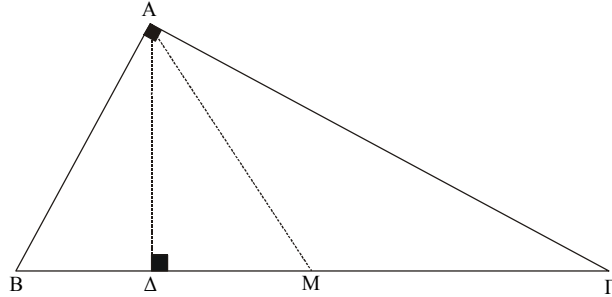


17. Το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

$$\text{Αφού } \hat{B} = 2\hat{\Gamma},$$

$$\text{έχουμε } \hat{B} = 60^\circ,$$

$$\hat{\Gamma} = 30^\circ$$



$A\Delta$ το ύψος και AM η διάμεσος του $AB\Gamma$.

$$\text{Άρα } \frac{A\Gamma^2}{AB^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} \quad (1) \quad AM = \frac{B\Gamma}{2} = BM \quad (2)$$

Άρα το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο (αφού $\hat{B} = 60^\circ$). Άρα $A\Delta$ ύψος και

$$\text{διάμεσος για το } ABM. \text{ Άρα } \Delta B = \frac{BM}{2} = \frac{M\Gamma}{2} \quad (3)$$

$$\text{Άρα από (1), (3) έχουμε } \frac{A\Gamma^2}{AB^2} = \frac{\Delta M + M\Gamma}{\Delta B} = \frac{\Delta B + 2\Delta B}{\Delta B} = \frac{3\Delta B}{\Delta B} = 3$$

18. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΔ, έχουμε:

$$\Gamma\Delta^2 = \Delta\epsilon^2 + \epsilon\Gamma^2 = \left(\frac{5AB}{4}\right)^2 + \epsilon\Gamma^2 =$$

$$AB^2 + \left(\frac{3AB}{4}\right)^2 + \epsilon\Gamma^2 \quad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ, έχουμε:

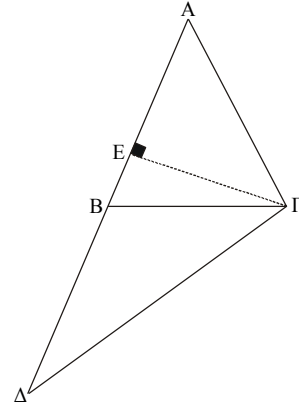
$$B\Gamma^2 = \epsilon\Gamma^2 + BE^2 \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\Gamma\Delta^2 = AB^2 + \frac{9}{16} AB^2 + \epsilon\Gamma^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{4}\right)^2 + \frac{8}{16} AB^2 + \epsilon\Gamma^2 =$$

$$AB^2 + BE^2 + \epsilon\Gamma^2 + \frac{8}{16} AB^2 = B\Gamma^2 + AB^2 + \frac{1}{2} AB^2 =$$

$$B\Gamma^2 + \frac{3}{2} AB^2 = B\Gamma^2 + \frac{3}{2} A\Gamma^2$$



19. Από το ορθογώνιο τρίγωνο

ΚΙΝ έχουμε:

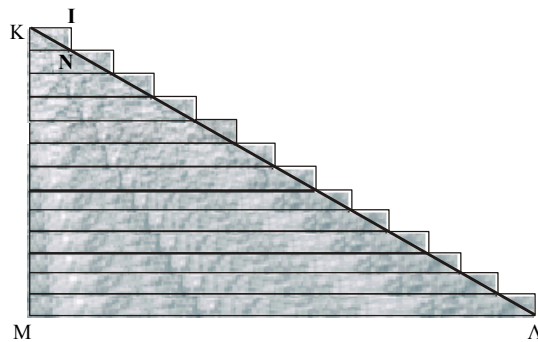
$$KN^2 = 30^2 + 40^2 \quad \text{ή}$$

$$KN^2 = 900 + 1600 \quad \text{ή}$$

$$KN = 50 \text{ cm}$$

$$ΚΛ = 13 \cdot 50 \text{ cm} \quad \text{ή}$$

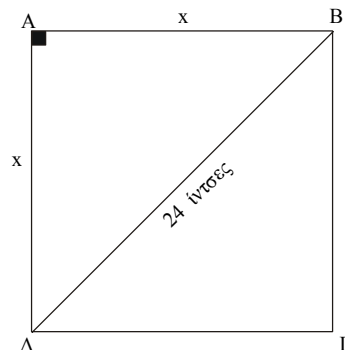
$$ΚΛ = 650 \text{ cm}$$



20. Με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$2x^2 = 24^2 \text{ ή } x^2 = 288 \text{ ή}$$

$$x = \sqrt{288} \text{ ή } x \approx 17 \text{ ίντσες}$$



21. Αν α , β , γ οι πλευρές του τριγώνου

$$ΑΒΓ \text{ έχουμε: } \frac{\gamma}{4} = \frac{\beta}{5} = \frac{\alpha}{6} = \kappa. \text{ Τότε:}$$

$$\gamma = 4\kappa, \beta = 5\kappa, \alpha = 6\kappa \quad (1)$$

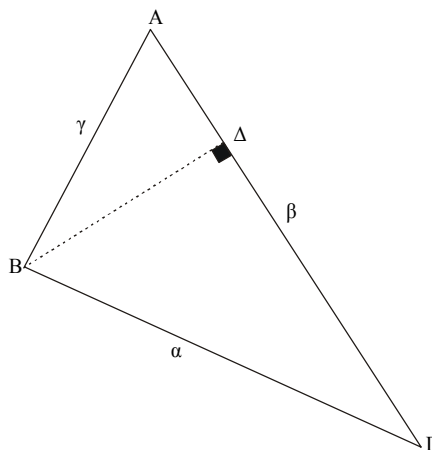
$$\text{Ισχύει: } 36\kappa^2 < 25\kappa^2 + 16\kappa^2 \text{ ή}$$

$36\kappa^2 < 41\kappa^2$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

Επίσης, με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta \text{ ή } 36\kappa^2 = 25\kappa^2 + 16\kappa^2 - 2 \cdot 5 \cdot \kappa \cdot A\Delta \text{ ή } -5\kappa^2 = -10\kappa \cdot A\Delta$$

$$\text{Άρα } A\Delta = \frac{\kappa}{2} \text{ ή } A\Delta = \frac{15\kappa}{30} \text{ ή } A\Delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{30} \text{ (λόγω της (1)).}$$



22. Έστω $B\Gamma = \sqrt{6}$, $A\Gamma = 1 + \sqrt{3}$, $AB = 2$

Όπως προκύπτει από τις σχέσεις των μηκών των πλευρών, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

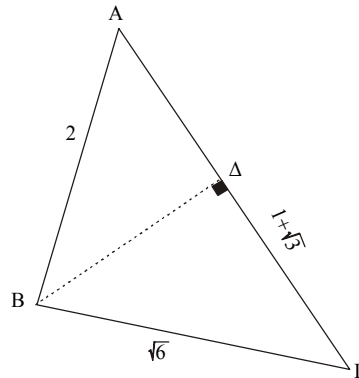
$$(\sqrt{6})^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + 2^2 - 2(1 + \sqrt{3}) A\Delta$$

$$6 = 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 4 - 2(1 + \sqrt{3}) A\Delta$$

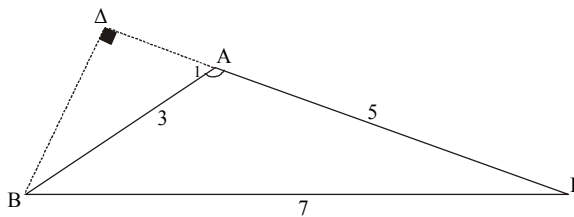
$$6 - 8 - 2\sqrt{3} = -2(1 + \sqrt{3}) A\Delta$$

$$-2(1 + \sqrt{3}) = -2(1 + \sqrt{3}) A\Delta, \text{ άρα } A\Delta = 1$$

$$\text{Αλλά } \sin A = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } A = 60^\circ.$$



23. i. Έχουμε: $7^2 > 5^2 + 3^2$,
 $49 > 34$, άρα το τρί-
 γωνο $AB\Gamma$ είναι
 αμβλυγώνιο με
 αμβλεία τη γωνία $\hat{A}$.



- ii. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$7^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot A\Delta$$

$$49 = 25 + 9 + 10A\Delta$$

$$15 = 10A\Delta \text{ ή } A\Delta = 1,5 \text{ cm}$$

$$\sin \hat{A}_1 = \frac{1,5}{3} = 0,5 = \frac{1}{2}, \text{ άρα } \hat{A}_1 = 60^\circ, \text{ άρα } \hat{A} = 120^\circ$$