24. Στο τρίγωνο ΑΒΔ, με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος, έχουμε:

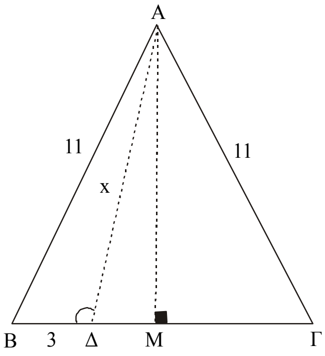
$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 + 2B\Delta \cdot \Delta M$

$11^2 = x^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2$

$121 = x^2 + 9 + 12$

$121 = x^2 + 21$, άρα $x^2 = 100$, άρα $x = 10$

Άρα $A\Delta = 10$



25. $$\left.\begin{aligned} \mu_\alpha^2 &= \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \\ \mu_\beta^2 &= \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \\ \mu_\gamma^2 &= \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} \end{aligned}\right\}$$. Έστω $\mu_\alpha = 5$, $\mu_\beta = 3$, $\mu_\gamma = 4$. Θα είναι:

$\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$ ή $2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 = 2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2$ ή

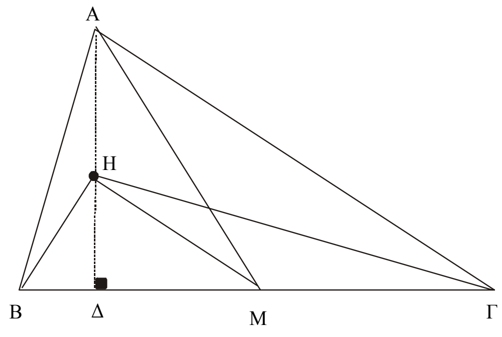
$\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2 > \alpha^2$, τότε $\hat{A} < 90°$. Παρόμοια βρίσκουμε $\hat{B} < 90°$ ή $\hat{\Gamma} < 90°$

26. Έστω το Μ μέσον της ΒΓ. Στο τρίγωνο ΒΗΓ με εφαρμογή του 2ου θεωρήματος διαμέσων έχουμε:

$H\Gamma^2 - HB^2 = 2B\Gamma \cdot \Delta M \qquad (1)$

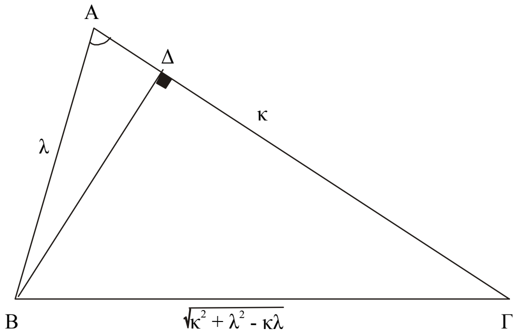
Ομοίως στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma \cdot \Delta M \qquad (2)$



Από (1) και (2) έχουμε: $H\Gamma^2 - HB^2 = A\Gamma^2 - AB^2$

27. Είναι: $\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda < \kappa^2 + \lambda^2$.
Άρα η γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά $\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda}$ είναι οξεία.



Έχουμε: $\left(\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda}\right)^2 =$

$\kappa^2 + \lambda^2 - 2\kappa\cdot\mathrm{A\Delta}$

$\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa\lambda = \kappa^2 + \lambda^2 - 2\kappa\cdot\mathrm{A\Delta} - \kappa\lambda = -\,2\kappa\cdot\mathrm{A\Delta}$

$\lambda = 2\mathrm{A\Delta}$ ή $\mathrm{A\Delta} = \dfrac{\lambda}{2}$. Όμως $\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{1}}$ ή $\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}$, άρα $\hat{\mathrm{A}} = 60°$

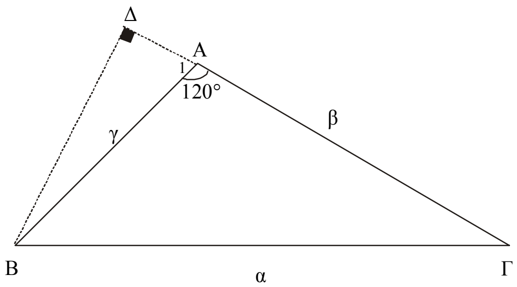
28. Ισχύει $\mu_\beta < \mu_\gamma$, άρα $\mu_\beta^2 < \mu_\gamma^2$.

Άρα $\dfrac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} < \dfrac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$ ή $3\gamma^2 < 3\beta^2$ ή $\gamma^2 < \beta^2$. Άρα $\beta > \gamma$.

29. i. Ισχύει:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\cdot\mathrm{A\Delta}$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:



$\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}_1 = \dfrac{\mathrm{A\Delta}}{\gamma}$

$\sigma\upsilon\nu 60° = \dfrac{\mathrm{A\Delta}}{\gamma}$

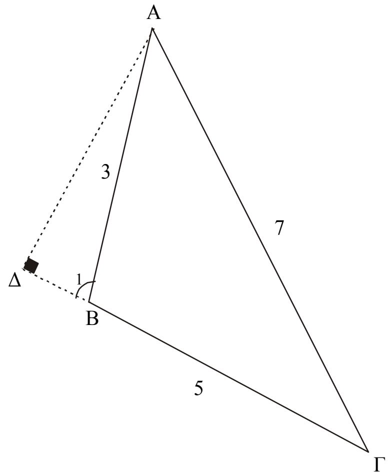
$\dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{A\Delta}}{\gamma}$, άρα $\mathrm{A\Delta} = \dfrac{\gamma}{2}$ (2)

ii. Από (1) και (2) έχουμε:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\,\dfrac{\gamma}{2}$ $\qquad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$

30. i. $7^2 > 3^2 + 5^2$ δηλαδή $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$, άρα

$\hat{B}$ αμβλεία



ii. $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \Delta B$

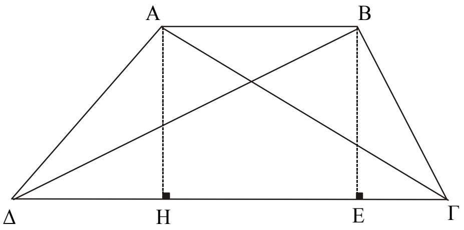
$7^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot \Delta B$ ή

$49 - 25 - 9 = 10\Delta B$ ή $\Delta B = 1{,}5$

iii. $\sigma\upsilon\nu B_1 = \dfrac{\Delta B}{AB} = \dfrac{1{,}5}{3} = 0{,}5.$

Άρα $B_1 = 60°$, άρα $\hat{B} = 120°$

31. Στο τρίγωνο ΑΔΓ με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:



$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta H$ (1)

Ομοίως στο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε:

$\Delta B^2 = B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot E\Gamma$ (2)

Προσθέτουμε τις (1), (2):

$A\Gamma^2 + \Delta B^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot \Delta H + B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma \cdot E\Gamma =$

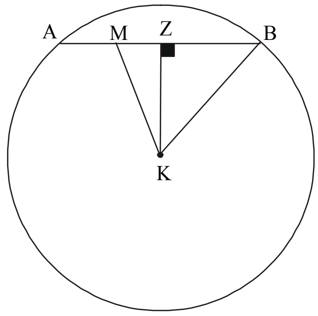
$A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma\,(\Delta H + E\Gamma).$

Αλλά $\Delta H + E\Gamma = AB = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα: $A\Gamma^2 + \Delta B^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma^2 - \dfrac{2\Delta\Gamma \cdot \Delta\Gamma}{2} =$

$A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$

32. Στο τρίγωνο ΜΚΒ με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:



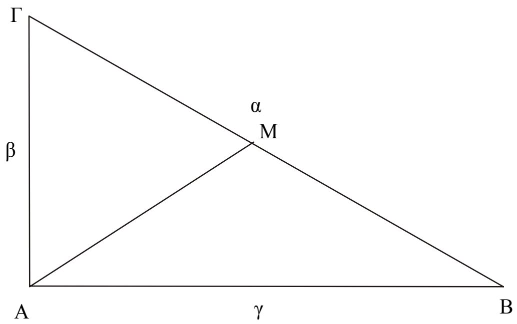
$ΚΒ^2 = ΜΚ^2 + ΜΒ^2 - 2ΜΒ·ΜΖ$

$R^2 = ΜΚ^2 + ΜΒ\,(ΜΒ - 2ΜΖ)$

Αλλά $ΜΒ - 2ΜΖ = ΑΜ$

Άρα $R^2 = ΜΚ^2 + ΜΒ·ΑΜ$

33. Έχουμε:



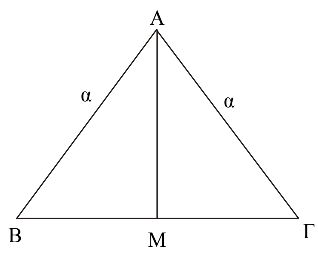
$$\gamma^2 + \beta^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

$$2\mu_\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$2\mu_\alpha^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\mu_\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{4}, \text{ άρα } \mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$$

34. $ΑΜ = \mu_\alpha = \upsilon_\alpha$



$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{ΒΓ^2}{2}$$

$$2\mu_\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} = 2\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{3\alpha^2}{2}$$

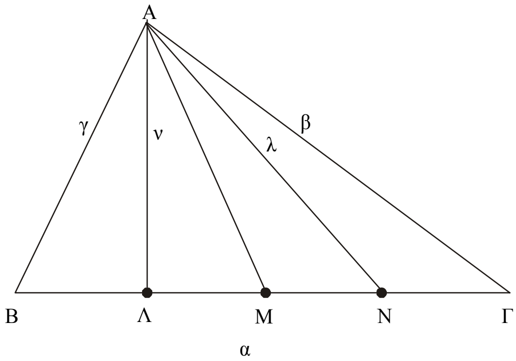
Τότε: $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \upsilon_\alpha$

35. Με εφαρμογή του 1ου θεωρήματος διαμέσων στο $\overset{\Delta}{A B \Gamma}$ έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2AM^2 + \frac{\alpha^2}{2} \qquad (1)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος διαμέσων στο $\overset{\Delta}{A \Lambda N}$ έχουμε:

$$\lambda^2 + \nu^2 = 2AM^2 + \frac{\Lambda N^2}{2}.$$



Τότε: $2AM^2 = \lambda^2 + \nu^2 - \dfrac{\Lambda N^2}{2}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $\beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2 + \nu^2 + \dfrac{\alpha^2}{2} - \dfrac{\Lambda N^2}{2} =$

$$= \lambda^2 + \nu^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2} = \lambda^2 + \nu^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{8}, \text{ άρα } \beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2 + \nu^2 + \frac{3\alpha^2}{8}$$

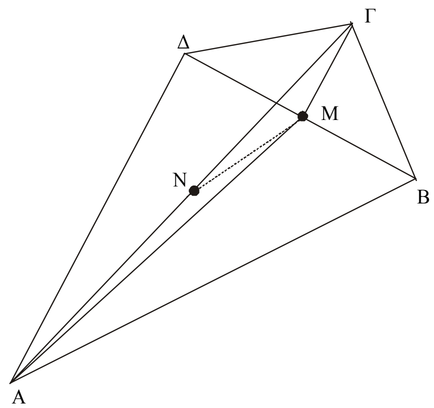
36. Έστω Μ μέσον του ΒΔ και Ν μέσον του ΑΓ.

Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{A B \Delta}$ έχουμε:

$$AB^2 + A\Delta^2 = 2AM^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{B \Gamma \Delta}$ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 2\Gamma M^2 + \frac{B\Delta^2}{2} \quad (2)$$

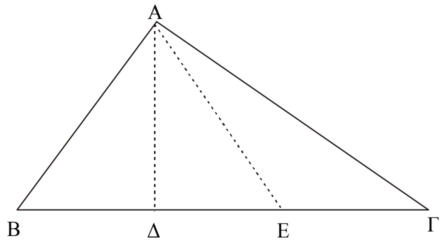


Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$$AB^2 + A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 2\,(AM^2 + \Gamma M^2) + B\Delta^2 =$$

$$2\,(2MN^2 + \frac{A\Gamma^2}{2}) + B\Delta^2 = 4MN^2 + A\Gamma^2 + B\Delta^2 \geq A\Gamma^2 + B\Delta^2$$

37. Εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα $A\overset{\Delta}{B}E$, $A\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$:



$AB^2 + AE^2 = 2A\Delta^2 + \dfrac{BE^2}{2}$ (1)

$A\Delta^2 + A\Gamma^2 = 2AE^2 + \dfrac{\Delta\Gamma^2}{2}$ ή

$2A\Delta^2 + 2A\Gamma^2 = 4AE^2 + \Delta\Gamma^2$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2):

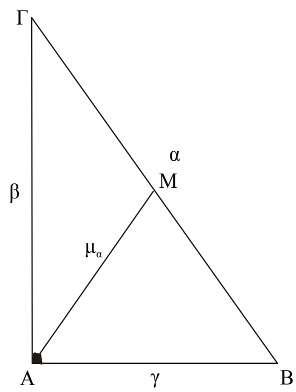
$AB^2 + AE^2 + 2A\Delta^2 + 2A\Gamma^2 = 2A\Delta^2 + 4AE^2 + \Delta\Gamma^2 + \dfrac{BE^2}{2}$ ή

$AB^2 + 2A\Gamma^2 = 3AE^2 + \Delta\Gamma^2 + \dfrac{BE^2}{2}$ (3)

Αλλά: $\Delta\Gamma = 2\Delta E$, $BE = 2\Delta E$

Άρα η (3) γίνεται: $AB^2 + 2A\Gamma^2 = 3AE^2 + 4\Delta E^2 + 2\Delta E^2 = 3AE^2 + 6\Delta E^2$

38. i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:



$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$

Άρα πρέπει να δειχθεί: $\alpha^2 = 4\mu_\alpha^2$

Αλλά $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$ ή $2\mu_\alpha = \alpha$.

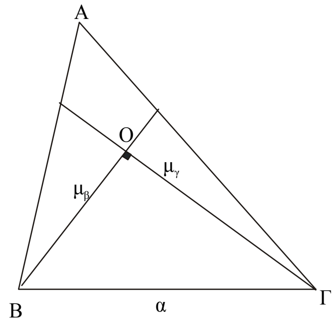
Άρα $4\mu_\alpha^2 = \alpha^2$ (1)

ii. $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \dfrac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \dfrac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$

$=$

$\dfrac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \dfrac{5\alpha^2}{4} = \alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{4} = 5\mu_\alpha^2$ (λόγω της (1)).

39. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{BO\Gamma}$ είναι ορθογώνιο. Άρα:



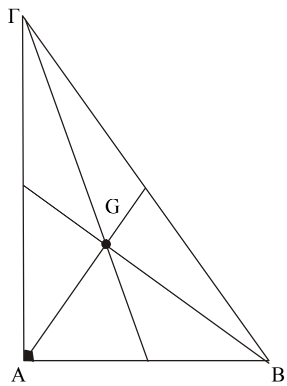
$$BO^2 + O\Gamma^2 = B\Gamma^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\mu_\beta\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\gamma\right)^2 = \alpha^2$$

$$\frac{4}{9}\left(\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2\right) = \alpha^2$$

$$\frac{4}{9}\left(\frac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4}\right) = \alpha^2 \text{ ή } 4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9\alpha^2 \text{ ή } \beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$$

40. i. $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 =$



$$\frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 + 2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

$$= \frac{3\beta^2 + 3\gamma^2 + 3\alpha^2}{4} = \frac{3(\beta^2 + \gamma^2) + 3\alpha^2}{4} =$$

$$\frac{3\alpha^2 + 3\alpha^2}{4} = \frac{6\alpha^2}{4} = \frac{3}{2}\alpha^2$$

ii. $GA^2 + GB^2 + G\Gamma^2 = \left(\frac{2}{3}\mu_\alpha\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\beta\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mu_\gamma\right)^2 =$

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}\alpha^2 = \frac{2}{3}\alpha^2$$

41. Ισχύει $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \dfrac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4}$ (1)

$5\mu_\alpha^2 = 5\,\dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$ (2)

$\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$ (3)

Η σχέση (3) λόγω των (1) και (2) γίνεται:

$\dfrac{4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \dfrac{10\beta^2 + 10\gamma^2 - 5\alpha^2}{4}$ ή $4\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 10\beta^2 + 10\gamma^2 - 5\alpha^2$

$9\alpha^2 = 9\beta^2 + 9\gamma^2$

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Άρα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ ορθογώνιο

42. Πρέπει να δειχθεί ότι:

$(\alpha^2 + \gamma^2) - (\beta^2 + \delta^2) = 2A\Gamma \cdot ZH$ ή

$(\alpha^2 - \beta^2) + (\gamma^2 - \delta^2) = 2A\Gamma \cdot ZH$

Στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ εφαρμόζουμε το 2ο θεώρημα διαμέσων:

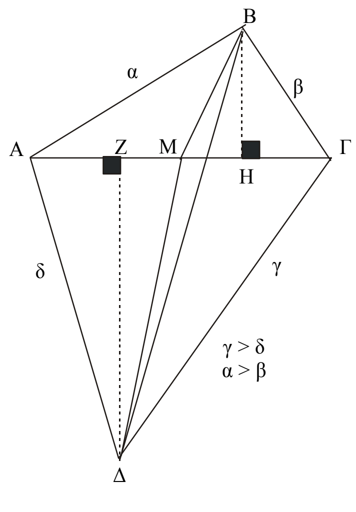
$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: $\alpha^2 - \beta^2 = 2A\Gamma \cdot MH$ (1)

$\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$: $\gamma^2 - \delta^2 = 2A\Gamma \cdot MZ$ (2)

Προσθέτοντας τις (1), (2) έχουμε:

$(\alpha^2 - \beta^2) + (\gamma^2 - \delta^2) = 2A\Gamma\,(MH + MZ)$ ή

$(\alpha^2 - \beta^2) + (\gamma^2 - \delta^2) = 2A\Gamma \cdot ZH$



43. $16\,(\mu_\alpha^2\,\mu_\beta^2 + \mu_\beta^2\,\mu_\gamma^2 + \mu_\alpha^2\,\mu_\gamma^2) = \ldots$ (με αντικατάσταση και πράξεις) =

$9\,(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)$