

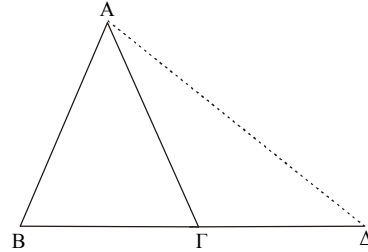
44. Με εφαρμογή του 1ου θεωρήματος

διαμέσων στο $\triangle A\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$A\Delta^2 + AB^2 = 2A\Gamma^2 + \frac{B\Delta^2}{2}$$

$$A\Delta^2 = 2A\Gamma^2 - AB^2 + \frac{B\Delta^2}{2} =$$

$$A\Gamma^2 + \frac{(2B\Gamma)^2}{2} = A\Gamma^2 + \frac{4B\Gamma^2}{2} = A\Gamma^2 + 2B\Gamma^2$$



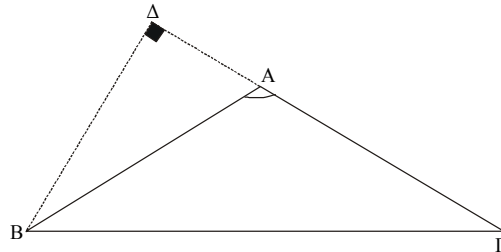
45. Εφαρμόζουμε το γενικευμένο

Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\triangle A\Gamma\Delta$:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta =$$

$$2A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta =$$

$$2A\Gamma (A\Gamma + A\Delta) = 2A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$$



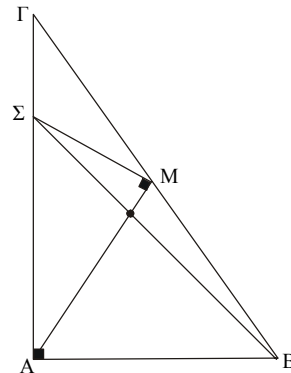
46. Στο $\triangle \Gamma\Sigma B$ εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα διαμέσων:

$$\Sigma B^2 + \Sigma\Gamma^2 = 2\Sigma M^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} =$$

$$2\Sigma M^2 + \frac{(2AM)^2}{2} = 2\Sigma M^2 + 2AM^2 =$$

$$2(\Sigma M^2 + AM^2) = 2\Sigma A^2$$

(γιατί το $\triangle \Sigma M A$ είναι ορθογώνιο στο M)

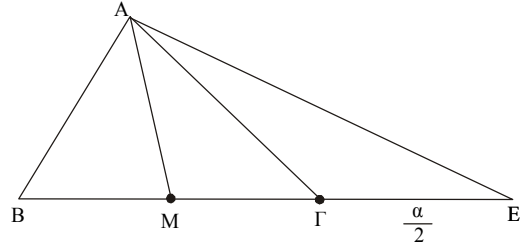


47. Εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα

διαμέσων στο $\triangle A M E$, στο οποίο η $A \Gamma$ είναι διάμεσος και έχουμε:

$$A E^2 + A M^2 = 2 A \Gamma^2 + \frac{M E^2}{2}$$

$$A E^2 = 2 \beta^2 - \mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (1)$$



Από την εφαρμογή του 1ου θεωρήματος διαμέσων στο $\triangle A B \Gamma$ έχουμε:

$$A B^2 + A \Gamma^2 = 2 A M^2 + \frac{B \Gamma^2}{2} \quad \text{ή} \quad \gamma^2 + \beta^2 = 2 \mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha^2}{2} = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \mu_a^2 \quad (2)$$

Η σχέση (1) βάσει της (2) γίνεται:

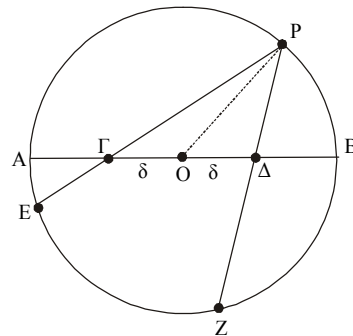
$$A E^2 = 2 \beta^2 - \mu_a^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2 \mu_a^2 \quad \text{ή} \quad A E^2 = 3 \beta^2 + \gamma^2 - 3 \mu_a^2$$

48. i. Ισχύει: $\Delta Z \cdot \Delta P = \Delta B \cdot \Delta A = (R - \delta)(R + \delta)$
 $= R^2 - \delta^2$

$$\text{Άρα } \Delta Z \cdot \Delta P = R^2 - \delta^2 \quad \text{ή} \quad \Delta Z = \frac{R^2 - \delta^2}{\Delta P} \quad (1)$$

$$\text{Ομοίως } \Gamma E \cdot \Gamma P = \Gamma A \cdot \Gamma B = (R - \delta)(R + \delta) = R^2 - \delta^2$$

$$\text{Άρα } \Gamma E \cdot \Gamma P = R^2 - \delta^2 \quad \text{ή} \quad \Gamma E = \frac{R^2 - \delta^2}{\Gamma P} \quad (2)$$



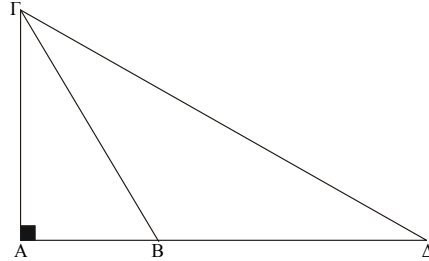
ii. Από τις (1), (2) έχουμε:

$$\frac{\Gamma P}{\Gamma E} + \frac{\Delta P}{\Delta Z} = \frac{\Gamma P}{\frac{R^2 - \delta^2}{\Gamma P}} + \frac{\Delta P}{\frac{R^2 - \delta^2}{\Delta P}} = \frac{\Gamma P^2}{R^2 - \delta^2} + \frac{\Delta P^2}{R^2 - \delta^2} =$$

$$\frac{\Gamma P^2 + \Delta P^2}{R^2 - \delta^2} = \frac{20P^2 + \frac{\Gamma \Delta^2}{2}}{R^2 - \delta^2} = \frac{2R^2 + 2\delta^2}{R^2 - \delta^2} = \text{σταθ.}$$

49. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΓΒΔ έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma\Delta^2 &= \Gamma B^2 + B\Delta^2 + 2\Delta B \cdot AB = \\ 2\Gamma B^2 + 2\Gamma B \cdot AB &= 2\Gamma B (\Gamma B + AB) = \\ 2\Gamma B (B\Delta + AB) &= 2\Gamma B \cdot A\Delta \end{aligned}$$



50. i. Με εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος στο

$\triangle A\hat{B}\Delta$ έχουμε:

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 - 2B\Delta \cdot M\Delta$$

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta (B\Delta - 2M\Delta) \quad (1)$$

Αλλά:

$$B\Delta - 2M\Delta = B\Delta - M\Delta - M\Delta =$$

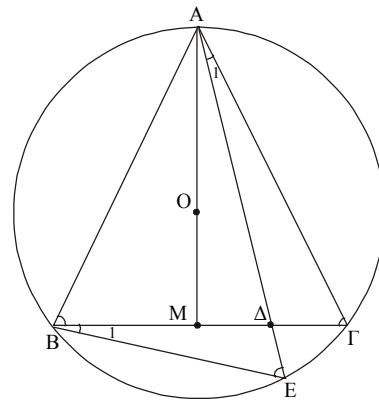
$$\frac{B\Gamma}{2} - M\Delta = \Delta\Gamma \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε: } AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta \cdot \Delta\Gamma \quad (3)$$

$$\text{Αλλά } A\Delta \cdot \Delta E = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \quad (4)$$

$$\text{Από (3) και (4) έχουμε: } AB^2 = A\Delta^2 + A\Delta \cdot \Delta E = A\Delta (A\Delta + \Delta E) = A\Delta \cdot AE$$

- ii. Από τα Β, Δ, Ε περνά ένας κύκλος και το σημείο Α είναι εξωτερικό του σημείο. Από τη σχέση $AB^2 = A\Delta \cdot AE$ έχουμε ότι το ΑΒ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο που ορίζεται από τα σημεία Δ, Ε, Β.



51. Ισχύει $ΑΓ \cdot ΓΒ = ΓΕ \cdot ΓΖ$ (1)

$$\text{Αλλά } ΑΓ = 3ΓΒ$$

$$ΓΕ = ΕΟ - ΓΟ = 15 - 10 = 5 \text{ cm}$$

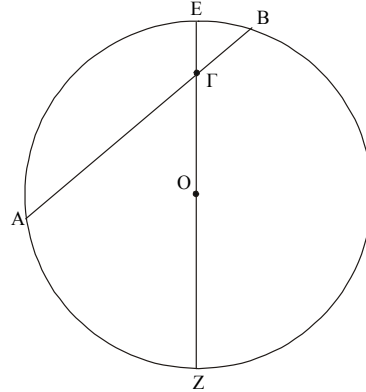
$$ΓΖ = ΓΟ + ΟΖ = 10 + 15 = 25 \text{ cm}$$

Η σχέση (1) βάσει των παραπάνω γίνεται:

$$3ΓΒ \cdot ΓΒ = 5 \cdot 25 \text{ ή } 3ΓΒ^2 = 125 \text{ ή}$$

$$ΓΒ = \sqrt{\frac{125}{3}}$$

$$\text{Αλλά } ΑΒ = ΑΓ + ΓΒ. \text{ Άρα } ΑΒ = 4ΓΒ \text{ ή } ΑΒ = 4\sqrt{\frac{125}{3}} \text{ cm}$$



52. i. $\hat{P} \hat{A} B \approx \hat{P} \hat{\Gamma} A$ (1) γιατί

$\hat{P} \hat{A} \Gamma = \hat{A} \hat{B} \Gamma$ (υπό χορδής και
εφαπτομένης)

$$\hat{P} = \hat{P} \text{ (κοινή)}$$

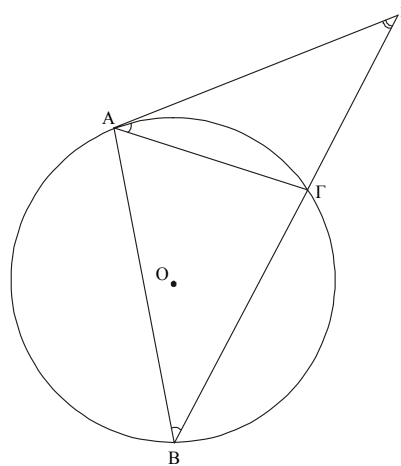
Άρα ισχύει η (1)

ii. Από την ομοιότητα έχουμε:

$$\frac{PB}{PA} = \frac{AB}{AG} = \frac{PA}{PG} \text{ άρα}$$

$$PA^2 = PB \cdot PG$$

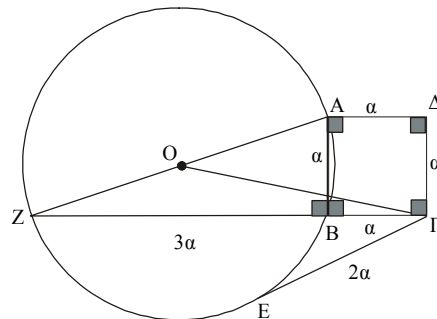
$$\text{Τότε: } \left(\frac{AB}{AG}\right)^2 = \left(\frac{PB}{PA}\right)^2 = \frac{PB^2}{PA^2} = \frac{PB^2}{PB \cdot PG} = \frac{PB}{PG}$$



-

$$\text{BH} \cdot \text{BE} + \text{AH} \cdot \text{A}\Delta = (\text{BZ} + \text{AZ}) \text{AB} \quad \text{ñ} \quad \text{BH} \cdot \text{BE} + \text{AH} \cdot \text{A}\Delta = \text{AB}^2$$

$$R = \sqrt{\frac{5}{2}} \alpha \quad \text{or} \quad R = \frac{\sqrt{10}}{2} \alpha$$



55. $PA = 9 \text{ cm}$, $PB = 10 \text{ cm}$, $P\Gamma = 15 \text{ cm}$

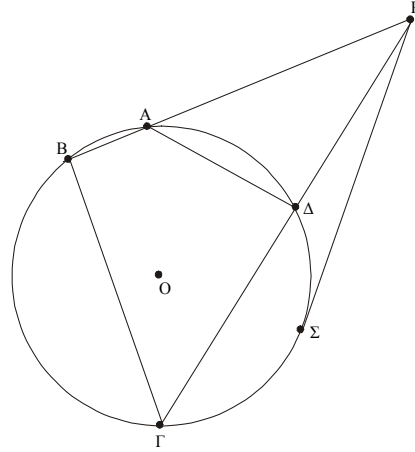
Ισχύει: $PA \cdot PB = P\Delta \cdot P\Gamma$

$$9 \cdot 10 = P\Delta \cdot 15 \quad \text{ή} \quad P\Delta = 6 \text{ cm}$$

$$P\Sigma^2 = P\Delta \cdot P\Gamma$$

$$P\Sigma^2 = 6 \cdot 15$$

$$P\Sigma = \sqrt{9 \cdot 10} = 3\sqrt{10} \text{ cm}$$



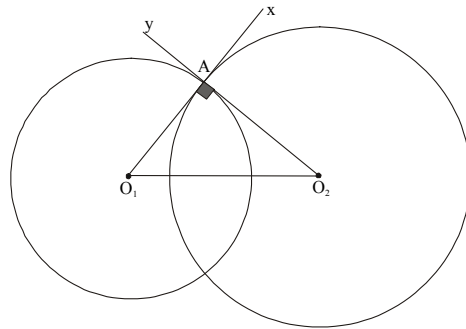
56. i. Έστω (O_1, R_1) , (O_2, R_2) οι δύο κύκλοι

$\hat{x} \hat{A} y = 90^\circ$, άρα $\hat{O_1 A O_2}$
ορθογώνιο

$$(O_1 O_2)^2 = (O_1 A)^2 + (O_2 A)^2 \quad \text{ή}$$

$$(O_1 O_2)^2 = R_1^2 + R_2^2 \quad (1)$$

$$\text{ii. } \Delta_{(O_2, R_2)}^{O_1} = (O_1 O_2)^2 - R_2^2 \stackrel{(1)}{=} R_1^2$$



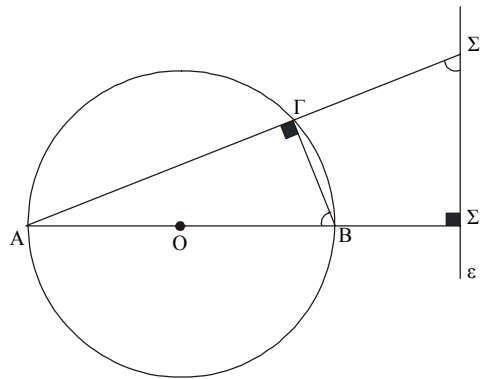
57. Το τετράπλευρο $B\Gamma\Sigma\Sigma'$ είναι

εγγράψιμο ($\hat{\Gamma} = \hat{\Sigma}' = 1L$) σε
κύκλο, άρα $A\Gamma \cdot A\Sigma = AB \cdot A\Sigma'$.

Αφού η ε σταθερή και ο κύκλος

$(O, \frac{AB}{2})$ σταθερός, το γινόμενο

$AB \cdot A\Sigma'$ είναι σταθερό: $A\Gamma \cdot A\Sigma$
 $= AB \cdot A\Sigma' = \text{σταθερό}.$



58. Θα δείξουμε: $PB^2 = P\Gamma^2 + B\Gamma \cdot B\Delta$ (1)

$P\Gamma^2 = PA \cdot PB$ ως εφαπτομένη στον
(O, R)

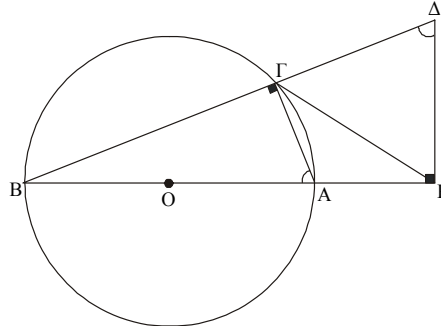
Από την (1) έχουμε:

$$PB^2 - P\Gamma^2 = PB^2 - PA \cdot PB =$$

$$PB(PB - PA) = PB \cdot AB \quad (2)$$

Αλλά ισχύει $PB \cdot AB = B\Gamma \cdot B\Delta$, γιατί
το $\Delta\Gamma P$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

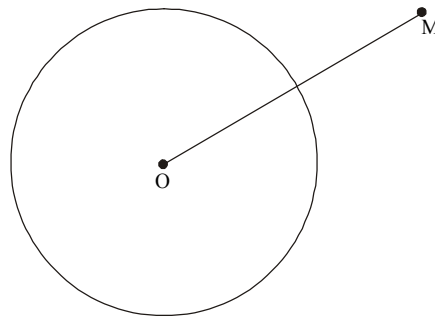
Άρα η (2) γίνεται: $PB^2 - P\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ ή $PB^2 = P\Gamma^2 + B\Gamma \cdot B\Delta$



59. Για κάθε σημείο M έτσι ώστε

$$MO = \delta \text{ ισχύει } \Delta_{(O,R)}^M = OM^2 - R^2 =$$

$$\delta^2 - R^2 = \text{σταθερό, } \delta > R.$$



60. Θα δείξουμε: $AE \cdot EB + 2OZ^2 = R^2$

Ισχύει $AE \cdot EB = R^2 - OE^2$ ή

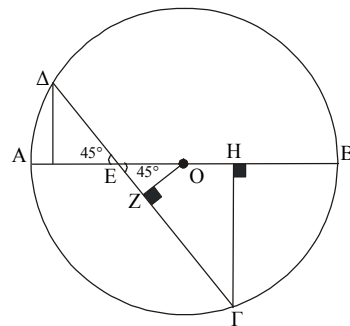
$$AE \cdot EB + OE^2 = R^2 \quad (1)$$

Αλλά το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{E} Z O$

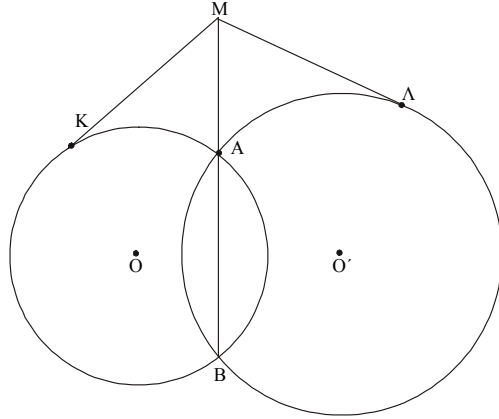
($\hat{Z} = 90^\circ$) είναι και ισοσκελές, άρα $EZ = ZO$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$OE^2 = EZ^2 + ZO^2 = 2ZO^2. \text{ Άρα η σχέση (1) γίνεται: } AE \cdot EB + 2ZO^2 = R^2$$



61. Έστω $(O, R), (O', R')$ οι δύο κύκλοι και MAB η κοινή τέμνουσα των δύο κύκλων. Τότε $MK^2 = MA \cdot MB$ και $ML^2 = MA \cdot MB$. Άρα $MK = ML$.



62. i. Ισχύει: $AM \cdot ME = BM \cdot MG = \frac{\alpha^2}{4}$,

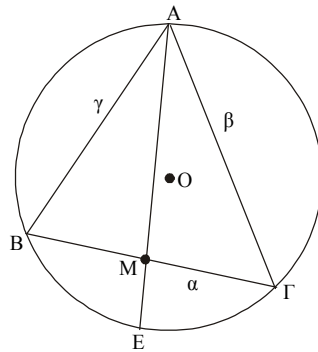
$$(\text{αφού } BM = MG = \frac{\alpha}{2})$$

- ii. Θεώρημα διαμέσων στο $\triangle AB\Gamma$:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (1) \quad \text{ή}$$

$$2(\beta^2 + \gamma^2) = 4\mu_a^2 + \alpha^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = 2(\beta^2 + \gamma^2) - 4\mu_a^2$$

$$\text{Από (i) έχουμε: } AM \cdot ME = \frac{\alpha^2}{4} = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - 4\mu_a^2}{4} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} - \mu_a^2$$



63. i. Πρέπει να δείξουμε ότι: $AM^2 + MK^2 = R^2$

Αφού $BM = MG$, $KB = KG$, τότε $KM \perp BG$

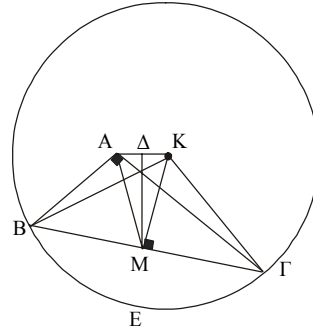
Είναι $AM = \frac{BG}{2}$ γιατί $\triangle ABG$ ορθογώνιο

στην $\hat{A}$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle KMG$ έχουμε:

$$MK^2 + MG^2 = R^2 \quad \text{ή}$$

$$MK^2 + \left(\frac{BG}{2}\right)^2 = R^2 \quad \text{ή} \quad MK^2 + AM^2 = R^2 \quad (1)$$



ii. Εφαρμόζουμε το θεώρημα διαμέσων στο $\triangle AMK$:

$$AM^2 + KM^2 = 2\Delta M^2 + \frac{AK^2}{2} \quad (AK \text{ σταθερό}) \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε: } R^2 - \frac{AK^2}{2} = 2\Delta M^2 \quad \text{ή} \quad \Delta M = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{AK^2}{4}} =$$

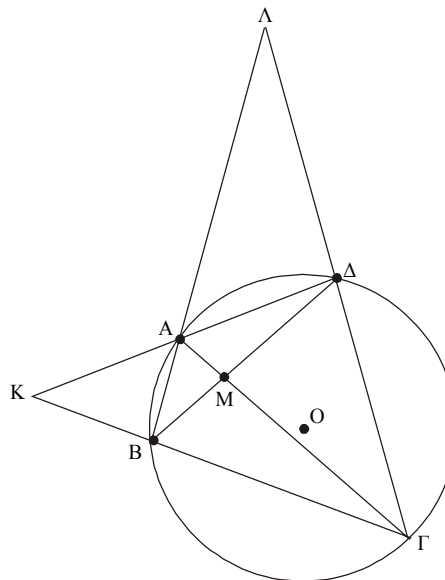
σταθερό

64. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Οι προεκτάσεις των AB , $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο Λ , οι προεκτάσεις των $A\Delta$, $B\Gamma$ στο K , καθώς και οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $A\Gamma$, $B\Delta$ στο M . Έτσι οι δυνατές σχέσεις που συνδέουν τις αποστάσεις των σημείων τομής από τα A , B , Γ , Δ είναι οι παρακάτω:

α) $MA \cdot M\Gamma = MB \cdot M\Delta$

β) $KA \cdot K\Delta = KB \cdot K\Gamma$

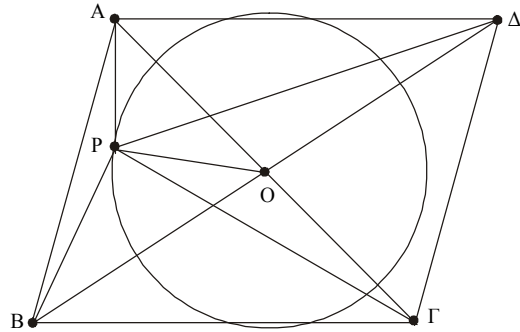
γ) $LA \cdot LB = LD \cdot L\Gamma$



65. Εφαρμόζουμε το 1ο θεώρημα
 διαμέσων στα τρίγωνα $\triangle PBD$,
 $\triangle PAG$ και έχουμε:

$$PB^2 + PD^2 = 2PO^2 + \frac{BD^2}{2} \quad (1)$$

$$PA^2 + PG^2 = 2PO^2 + \frac{AG^2}{2} \quad (2)$$



Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2): $PA^2 + PB^2 + PG^2 + PD^2 =$

$$4PO^2 + \frac{AG^2 + BD^2}{2} = 4R^2 + \frac{AG^2 + BD^2}{2} = \text{σταθερό, αφού οι διαγώνιες}$$

AG, BD του παραλληλογράμμου είναι σταθερά ευθύγραμμα τμήματα.