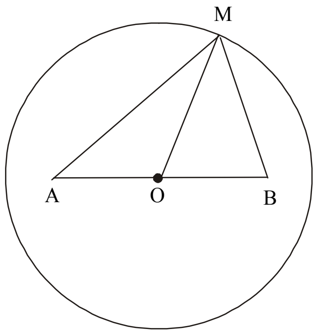
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

Απαντήσεις - Λύσεις

1. Δίνεται ΑΒ = 6λ

Έστω Μ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου.

Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΜΑΒ έχουμε: $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2}$,



Ο μέσον του ΑΒ ή $50\lambda^2 = 2MO^2 + \dfrac{36\lambda^2}{2}$ ή

$MO^2 = 16\lambda^2$ ή $MO = 4\lambda$ = σταθερό

Άρα το σημείο Μ απέχει σταθερή απόσταση από το μέσο του ΑΒ, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος (Ο, 4λ)

Αντίστροφα: Έστω ένα σημείο Μ του κύκλου (Ο, 4λ).

Τότε: $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 2\,(4\lambda)^2 + \dfrac{36\lambda^2}{2} = 32\lambda^2 + 18\lambda^2 = 50\lambda^2$

Άρα το Μ έχει την ιδιότητα: $MA^2 + MB^2 = 50\lambda^2$

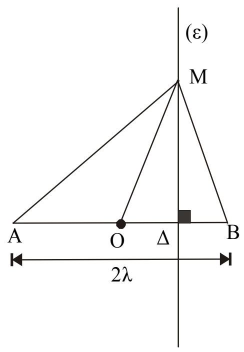
Ο γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα σημεία του κύκλου (Ο, 4λ).

2. Δίνεται ΑΒ = 2λ, Ο το μέσον του.

Έστω ένα σημείο Μ του επιπέδου με:

$MA^2 - MB^2 = 2AB\cdot O\Delta$ ή $2\lambda^2 = 2AB\cdot O\Delta$

$2\lambda^2 = 4\lambda\cdot O\Delta$ ή $O\Delta = \dfrac{\lambda}{2}$ = σταθερό



(ΜΑ > ΜΒ) Το σημείο Δ βρίσκεται στην ημιευθεία ΟΒ και απέχει από το Ο σταθερή απόσταση $O\Delta = \dfrac{\lambda}{2}$.

Το δε σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε, που είναι κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Δ.

Αντίστροφα: Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ευθείας (ε) ισχύει:

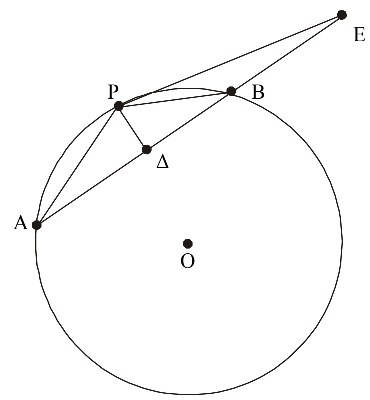
$MA^2 - MB^2 = 2AB \cdot O\Delta = 2 \cdot 2\lambda \cdot \frac{\lambda}{2} = 2\lambda^2$.

Το Μ ικανοποιεί την ιδιότητα του προβλήματος. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία (ε).

3. Έστω Ρ σημείο του μικρού τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ώστε $\frac{PA}{PB} = \frac{\mu}{\nu}$ και σημεία Δ, Ε του ΑΒ ώστε:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{PA}{PB} = \frac{EA}{EB} = \frac{\mu}{\nu} \qquad (1)$$

Σύμφωνα με την (1) αρκεί να χωρίσουμε τη χορδή ΑΒ σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$, εσωτερικά και εξωτερικά.



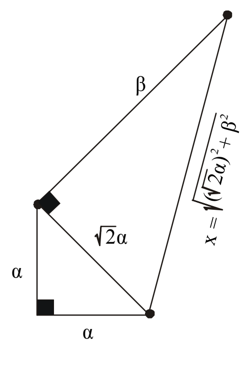
Τότε τα Δ, Ε είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β και η $\Delta\hat{P}E = 90°$. Άρα το Ρ βρίσκεται και πάνω στον κύκλο διαμέτρου ΔΕ.

Κατασκευή: Γράφουμε κύκλο διαμέτρου ΔΕ όπου η τομή με τον (Ο, R) ορίζει το σημείο Ρ του $\overset{\frown}{AB}$ (έλασσον) που αντιστοιχεί στη χορδή ΑΒ. Ο κύκλος διαμέτρου ΔΕ τέμνει το μεγάλο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ σ' ένα σημείο και δίνει δεύτερη λύση.

4. $x^2 = (\sqrt{2}\,\alpha)^2 + \beta^2$. Κατασκευάζω:

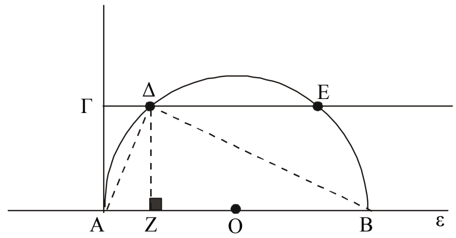
i. το $\sqrt{2}\,\alpha$, ως υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, α.

ii. το x ως υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές β, $\sqrt{2}\,\alpha$.



5. Πρέπει να είναι $x + y = 6$

$xy = 8 = (2\sqrt{2})^2$



Πάνω σε ευθεία ε παίρνουμε τμήμα ΑΒ = 6. Με διάμετρο το ΑΒ γράφουμε ημικύκλιο $(\text{Ο}, \frac{\text{ΑΒ}}{2})$.

Από το Α φέρουμε εφαπτομένη στο ημικύκλιο και σ' αυτήν παίρνουμε τμήμα $\text{ΑΓ} = 2\sqrt{2}$. Από το Γ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει το ημικύκλιο σε δύο σημεία Δ, Ε.

Η κάθετος από το Δ προς την ΑΒ τέμνει αυτήν σε σημείο Ζ, που τη χωρίζει σε δύο τμήματα ΑΖ, ΖΒ. Αυτά είναι τα ζητούμενα τμήματα x, y.

Πράγματι ΑΖ + ΖΒ = 6. Επίσης εάν φέρουμε τις ΑΔ, ΔΒ, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ ισχύει:

$\text{ΔΖ}^2 = \text{ΑΖ}\cdot\text{ΖΒ}$ ή $(2\sqrt{2})^2 = xy$

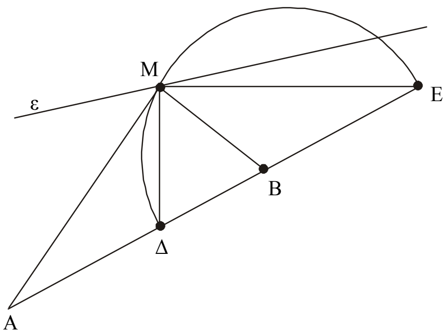
Άρα ΑΖ = x, ΖΒ = y.

Παρατήρηση: Στο συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχουν δύο λύσεις, αφού $2\sqrt{2} < 3$ και άρα η παράλληλη από το Γ προς την ΑΒ τέμνει το ημικύκλιο σε δύο σημεία.

6. Έστω Μ σημείο της ε ώστε

$\frac{\text{ΜΑ}}{\text{ΜΒ}} = \frac{\mu}{\nu}$ και Δ, Ε σημεία του ΑΒ

ώστε $\frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΔΒ}} = \frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{\text{ΜΑ}}{\text{ΜΒ}} = \frac{\mu}{\nu}$ (1).



Τα Δ, Ε είναι τα συζυγή αρμονικά των Α, Β, είναι σταθερά και η $\text{Δ}\hat{\text{Μ}}\text{Ε} = 90°$.

Άρα το σημείο Μ βρίσκεται και πάνω στον κύκλο διαμέτρου ΔΕ.

Κατασκευή: Προσδιορίζουμε τα Δ, Ε ώστε να είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β σύμφωνα με την (1). Γράφουμε κύκλο διαμέτρου ΔΕ. Οι τομές του κύκλου αυτού με την ε ορίζουν τα ζητούμενα σημεία Μ.

Παρατήρηση: Για να έχει λύση το πρόβλημα πρέπει η απόσταση του μέσου του ΔΕ από την ε να είναι μεγαλύτερη ή ίση με $\frac{ΔΕ}{2}$ (δύο λύσεις ή μία λύση αντίστοιχα).

7. $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$ (θεώρημα διαμέσων στο $A\overset{\Delta}{M}B$, ΑΒ σταθερό). Για να είναι το $MA^2 + MB^2$ ελάχιστο θα πρέπει να είναι ελάχιστο το ΜΟ, το οποίο είναι όταν $OM \perp (ε)$ ($OM \leq OM'$), Μ΄ τυχαίο σημείο της (ε).