

29. Τα τρίγωνα ABE και ABΓ έχουν κοινή γωνία A, άρα:

$$\frac{(ABE)}{(AB\Gamma)} = \frac{AB \cdot AE}{AB \cdot A\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad (1)$$

Όμοια τα τρίγωνα AΔΕ και ABE, άρα:

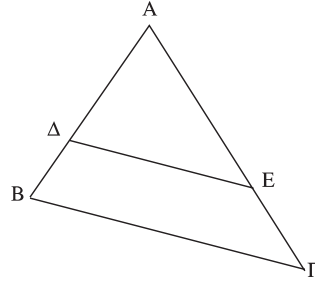
$$\frac{(A\Delta E)}{(ABE)} = \frac{A\Delta \cdot AE}{AB \cdot AE} = \frac{A\Delta}{AB} \quad (2)$$

Όμως από το θεώρημα του Θαλή: $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB}$

$$(3) \quad (\Delta E \parallel B\Gamma)$$

Από (1), (2), (3) έχουμε $\frac{(ABE)}{(AB\Gamma)} = \frac{(A\Delta E)}{(ABE)}$.

Άρα $(ABE)^2 = (AB\Gamma) (A\Delta E)$.



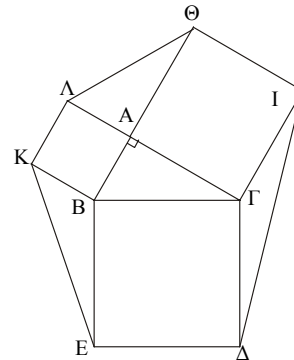
30. α) Γωνία KBE + γωνία ABΓ = 180°.

$$\text{Άρα } \frac{(KBE)}{(AB\Gamma)} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\alpha} = 1$$

$$(AB = KB = \gamma, B\Gamma = BE = \alpha).$$

$$\text{Άρα } (KBE) = (AB\Gamma) = \frac{\beta\gamma}{2} \quad (A\Gamma = \gamma).$$

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } (\Delta\Gamma I) = \frac{\beta\gamma}{2}, (\Lambda A\Theta) = \frac{\beta\gamma}{2}$$



$$\beta) (\Delta E K \Lambda \Theta I) = (AB\Gamma) + (KBA\Lambda) + (A\Gamma I\Theta) + (B\Gamma\Delta E) + (KBE) + (\Delta\Gamma I) +$$

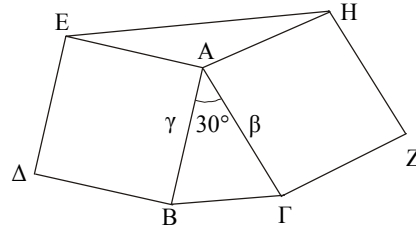
$$(\Lambda A\Theta) = \frac{\beta\gamma}{2} + \gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma =$$

$$\alpha^2 + (\beta + \gamma)^2 \quad \text{ή} \quad (\Delta E K \Lambda \Theta I) = 2\alpha^2 + 2\beta\gamma = 2(\alpha^2 + \beta\gamma).$$

31. α) $\widehat{BAG} + \widehat{EAH} = 180^\circ$.

Άρα $\frac{(EAH)}{(AB\Gamma)} = \frac{\gamma\beta}{\gamma\beta} = 1$.

β) $(B\Gamma ZHE\Delta) = (AB\Gamma) + (EAH) +$
 $(EAB\Delta) + (A\Gamma ZH) = \frac{\gamma\beta\eta\mu 30^\circ}{2} +$
 $\frac{\gamma\beta\eta\mu 150^\circ}{2} + \gamma^2 + \beta^2 = \frac{\gamma\beta}{2} + \gamma^2 + \beta^2$



32. α) Αφού τρίγωνο ΑΗΓ ισοσκελές, τότε
 $AH = H\Gamma = v$ (1) και $A\Gamma = \sqrt{2} v$.

Αφού στο τρίγωνο ΑΒΗ, $\widehat{BAH} = 30^\circ$,

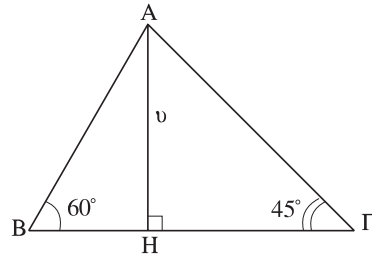
τότε $AB = \frac{2v}{\sqrt{3}} = \frac{2v\sqrt{3}}{3}$ και

$BH = \frac{AB}{2} = \frac{v\sqrt{3}}{3}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $B\Gamma = BH + H\Gamma = v \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3} \right)$

β) $E = v^2 \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right)$

γ) $E = \frac{v_1 \cdot AB}{2}, \dots, v_1 = v \left(\frac{3 + 3\sqrt{3}}{6} \right)$ $E = \frac{v_2 \cdot A\Gamma}{2}, \dots, v_2 = v \left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6} \right)$



33. α) Τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Β.

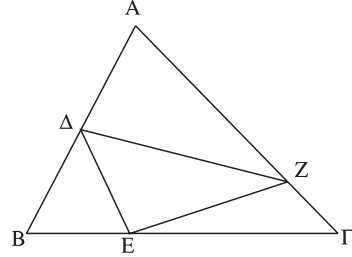
$$\text{Άρα } \frac{(\Delta ΒΕ)}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{ΒΔ \cdot ΒΕ}{ΑΒ \cdot ΒΓ}, \text{ όμως } ΒΕ = \frac{1}{3}$$

$$ΒΓ \text{ και } ΒΔ = \frac{1}{2} ΑΒ.$$

$$\text{Άρα } \frac{(\Delta ΒΕ)}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\frac{ΑΒ}{2} \cdot \frac{ΒΓ}{3}}{ΑΒ \cdot ΒΓ} = \frac{1}{6}, \text{ άρα } (\Delta ΒΕ) = \frac{(\text{ΑΒΓ})}{6} = \frac{Ε}{6}.$$

$$\text{Όμοια βρίσκουμε } (\text{ΖΓΕ}) = \frac{(\text{ΑΒΓ})}{6} = \frac{Ε}{6} \text{ και } (\text{ΑΔΖ}) = \frac{3(\text{ΑΒΓ})}{8} = \frac{3Ε}{8}.$$

$$\beta) (\Delta ΕΖ) = (\text{ΑΒΓ}) - (\Delta ΒΕ) - (\text{ΑΔΖ}) - (\text{ΖΕΓ}) = Ε - \frac{Ε}{6} - \frac{3Ε}{8} - \frac{Ε}{6} = \frac{7Ε}{24}$$

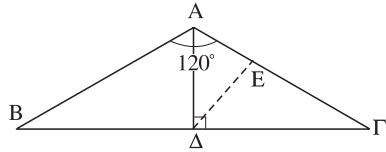


34. α) $(\text{ΑΒΓ}) = ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot \eta\mu 120^\circ = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$

- β) Τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Γ.

$$\text{Άρα } \frac{(\Delta ΕΓ)}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\Delta Γ \cdot ΕΓ}{ΑΓ \cdot ΒΓ} = \frac{\frac{ΒΓ}{2} \cdot \frac{2ΑΓ}{3}}{ΑΓ \cdot ΒΓ} = \frac{2}{6}$$

$$\text{Απ' όπου } (\Delta ΕΓ) = \frac{2(\text{ΑΒΓ})}{6} = \frac{2 \cdot 18\sqrt{3}}{6} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



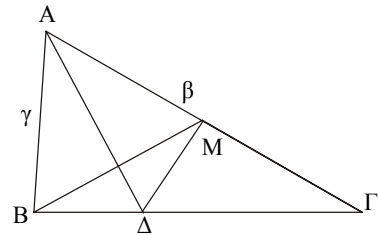
35. α) Τα τρίγωνα ΒΜΔ και ΔΜΓ έχουν κοινό ύψος, έστω υ, από την κορυφή Μ. Έτσι:

$$\frac{(\text{ΒΜΔ})}{(\Delta ΜΓ)} = \frac{υ \cdot ΒΔ}{υ \cdot ΔΓ} = \frac{ΒΔ}{ΔΓ}.$$

$$\text{Όμως } \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2} = \frac{ΒΔ}{ΔΓ} \quad (1)$$

(θεώρημα διχοτόμων στο ΑΒΓ, με ΑΔ διχοτόμο της γωνίας Α)

$$\text{Άρα } \frac{(\text{ΒΜΔ})}{(\Delta ΜΓ)} = \frac{1}{2}$$



$$\beta) \frac{(M\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{M\Gamma \cdot \Delta\Gamma}{A\Gamma \cdot B\Gamma} \quad (2)$$

Όμως από την (1) έχουμε:

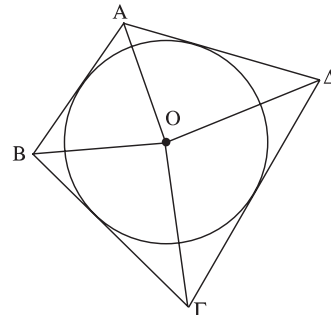
$$\frac{B\Delta + \Delta\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{1+2}{2}, \dots, \Delta\Gamma = \frac{2B\Gamma}{3} \quad (3)$$

$$\text{Έτσι, από τις (2), (3) έχουμε: } \frac{(M\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\frac{A\Gamma}{2} \cdot \frac{2B\Gamma}{3}}{A\Gamma \cdot B\Gamma} = \dots = \frac{1}{3}$$

$$36. (OAB) = \frac{AB \cdot \rho}{2} \quad (\rho \text{ ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου})$$

$$(O\Gamma\Delta) = \frac{\Gamma\Delta \cdot \rho}{2}, \quad (O\Lambda\Delta) = \frac{\Lambda\Delta \cdot \rho}{2},$$

$$(OB\Gamma) = \frac{B\Gamma \cdot \rho}{2}$$



$$(OAB) + (O\Gamma\Delta) = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \rho \quad (O\Lambda\Delta) + (OB\Gamma) = \frac{\Lambda\Delta + B\Gamma}{2} \rho \quad (1)$$

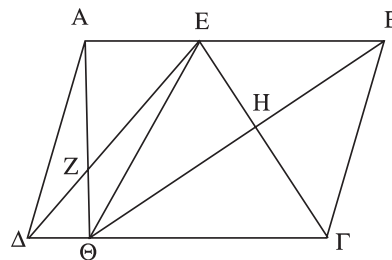
$$\text{Όμως } AB + \Delta\Gamma = \Lambda\Delta + B\Gamma \quad (2)$$

$$\text{Άρα, από (1) και (2) έχουμε } (OAB) + (O\Gamma\Delta) = (O\Lambda\Delta) + (OB\Gamma)$$

Σημείωση: Η απόδειξη της (2) είναι απλή λόγω της ισότητας των εφαπτόμενων προς τον κύκλο από σημείο εκτός αυτού.

$$37. \alpha) (EZ\Theta) = (A\Theta E) - (AZE) \quad (1) \text{ και } (AZ\Delta) = (A\Delta E) - (AZE) \quad (2)$$

Όμως $(A\Theta E) = (A\Delta E)$, διότι έχουν κοινή βάση την ΑΕ και ίσα ύψη από τις κορυφές Δ και Θ την απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ. Άρα, από (1), (2) έχουμε $(EZ\Theta) = (AZ\Delta)$



$$\beta) (EZ\Theta H) = (EZ\Theta) + (E\Theta H) \quad (3)$$

$$\text{Όμως στο ερώτημα (α) αποδείξαμε ότι} \quad (EZ\Theta) = (AZ\Delta) \quad (4)$$

$$\text{και με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι} \quad (E\Theta H) = (HB\Gamma) \quad (5)$$

$$\text{Άρα η (3) λόγω των (4), (5) γίνεται:} \quad (EH\Theta Z) = (AZ\Delta) + (HB\Gamma)$$

38. α) Το AZEΔ είναι τραπέζιο (γενικά). Άρα:

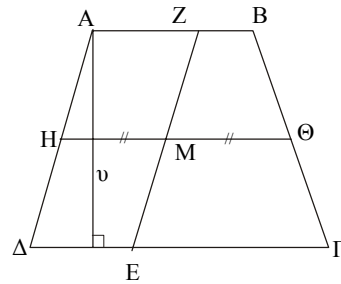
$$HM = \frac{AZ + \Delta E}{2}.$$

$$\text{Άρα } (AZE\Delta) = \frac{AZ + \Delta E}{2} \cdot v = HM \cdot v \quad (1)$$

β) Όμοια με το ερώτημα (α) αποδεικνύεται
ότι $(ZB\Gamma E) = M\Theta \cdot v$ (2)

$$\text{Όμως } M\Theta = HM \quad (3)$$

$$\text{Άρα από τις (1), (2), (3) έχουμε: } (AZE\Delta) = (ZB\Gamma E)$$



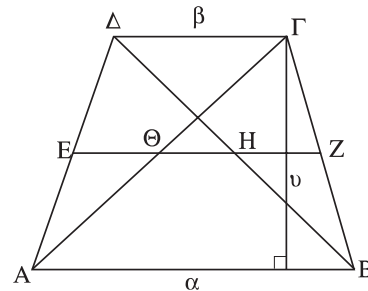
39. α) $(AH\Gamma) = (A\Theta H) + (\Theta H\Gamma)$.

Όμως τα τρίγωνα AΘH και ΘHΓ έχουν

$$\text{κοινή βάση τους } \Theta H = \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ και ίσα}$$

$$\text{ύψη } \frac{v}{2}, \text{ άρα } (AH\Gamma) = \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{v}{2} \cdot \frac{1}{2} +$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{v}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(\alpha - \beta)}{4} v$$



$$\beta) (ABZE) = \frac{EZ + \alpha}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} + \alpha}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{\frac{3\alpha + \beta}{2}}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{3\alpha + \beta}{4} \cdot \frac{v}{2} \quad \text{ή}$$

$$(ABZE) = \frac{3\alpha + \beta}{8} v. \text{ Όμοια } (EZ\Gamma\Delta) = \frac{3\beta + \alpha}{8} v.$$

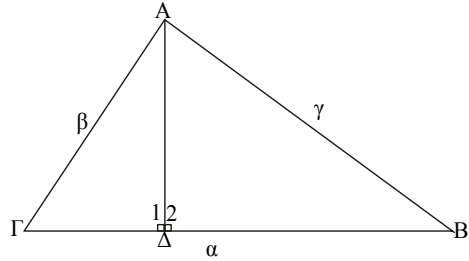
$$\text{Άρα } (ABZE) - (EZ\Gamma\Delta) = \frac{\alpha - \beta}{4} v = (AH\Gamma)$$

40. α) $17^2 = 8^2 + 15^2$, άρα $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Άρα $\triangle AB\Gamma$ ορθογώνιο στο Α.

β) Τα τρίγωνα $(\triangle AB\Delta)$, $(\triangle A\Gamma\Delta)$ είναι όμοια.

Άρα: $\frac{(\triangle AB\Delta)}{(\triangle A\Gamma\Delta)} = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2$

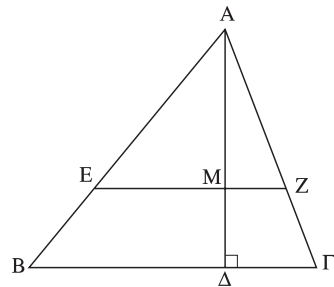


41. Τα τρίγωνα $\triangle AEZ$ και $\triangle AB\Gamma$ είναι όμοια. Άρα

$$\frac{(\triangle EZ)}{(\triangle B\Gamma)} = \left(\frac{AM}{A\Delta}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Αφού $(\triangle B\Gamma) = 90 \text{ cm}^2$, τότε

$$(\triangle EZ) = \frac{4 \cdot 90}{9} = 40 \text{ cm}^2$$



42. α) Τα τρίγωνα $\triangle \Gamma'\Delta\Delta'$ και $\triangle BB'\Lambda'$ είναι ίσα διότι έχουν:

i) $BB' = \Delta\Delta'$ ii) $\Gamma'\Delta = BA'$

iii) $\hat{\Delta} = \hat{B}$

Άρα $\triangle \Gamma'\Delta' = \triangle B'\Lambda'$.

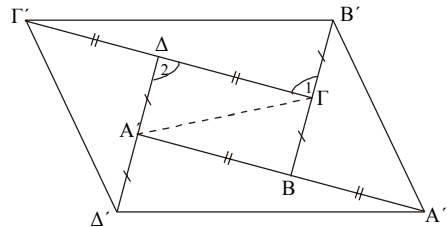
Όμοια $\triangle \Gamma'B' = \triangle \Lambda'A'$, άρα το $\triangle \Gamma'B'\Lambda'\Delta'$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) $\hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1$, άρα έχουμε $\frac{(\triangle \Gamma'TB')}{(\triangle \Lambda\Delta\Gamma)} = \frac{\Gamma B' \cdot \Gamma T}{\Lambda\Delta \cdot \Delta\Gamma} = \frac{2\Delta\Gamma}{\Delta\Gamma} = 2$

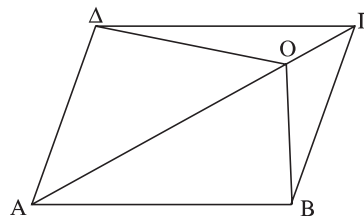
Άρα: $(\triangle \Gamma'TB') = 2 (\triangle \Lambda\Delta\Gamma) = 2 \frac{E}{2} = E$

Όμοια: $(\triangle \Gamma'\Delta\Delta') = E$. Έτσι έχουμε:

$$(\triangle \Lambda'B'\Gamma'\Delta') = (\triangle AB\Gamma\Delta) + 2 (\triangle \Gamma'\Delta\Delta') + 2 (\triangle \Gamma'TB') = E + 2E + 2E = 5E$$



43. Τα τρίγωνα ΔO , AOB έχουν κοινή βάση OA και ίσα ύψη v από τις κορυφές Δ και B (η ισότητα των υψών είναι προφανής λόγω της ισότητας των αντιστοίχων ορθογωνίων τριγώνων που σχηματίζονται από τα ύψη και τις πλευρές $A\Delta$, $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$), άρα είναι ισοδύναμα.



44. Είναι τρίγωνα $AH\Delta = Z\Gamma B$.
 Άρα $AH = ZB$ και $\Delta\Gamma = HZ$ (αφού $\Delta HZ\Gamma$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).

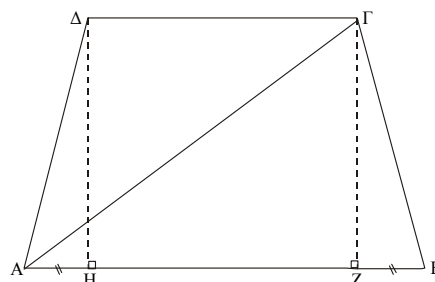
$$\text{Άρα } AZ = HZ + AH = \Delta\Gamma + AH \quad (1)$$

$$HB = HZ + ZB = \Delta\Gamma + ZB =$$

$$\Delta\Gamma + AH = AZ \quad (2)$$

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\Delta\Gamma + AB}{2} v = \frac{\Delta\Gamma + AH + HB}{2} v = \frac{\Delta\Gamma + AH}{2} v + \frac{HB}{2} v \stackrel{(1)}{=}$$

$$= \frac{AZ}{2} v + \frac{HB}{2} v \stackrel{(2)}{=} \frac{AZ}{2} v + \frac{AZ}{2} v = 2 (A\Gamma Z)$$



45. $2\alpha + v + V = 60 \quad (1)$

$$\frac{v+V}{2} 8 = 160 \quad (2)$$

Από την (1) λόγω της (2) έχουμε

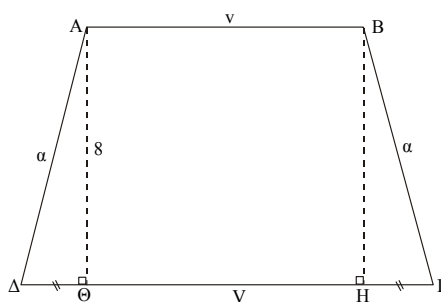
$$2\alpha = 20, \text{ άρα } \alpha = 10 \text{ m.}$$

Στο $\triangle BH\Gamma$ έχουμε

$$\alpha^2 = BH^2 + H\Gamma^2, \dots, H\Gamma = 6 \text{ m}$$

$$\text{Όμως } \Delta\Theta = H\Gamma, \text{ άρα } 2v + 2H\Gamma = 60 - 2\alpha = 40, \dots, v = 14 \text{ m}$$

$$\text{Άρα } V = 14 + 2 \cdot 6 = 26 \text{ m.}$$



46. Αφού $\triangle O\Delta\Gamma \approx \triangle O\hat{A}B$

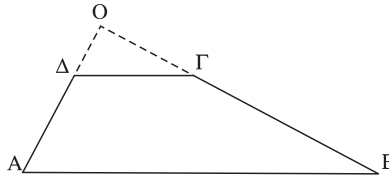
$$\alpha) \frac{O\Delta}{OA} = \frac{O\Gamma}{OB} = \frac{\Delta\Gamma}{AB} \quad \text{ή}$$

$$\frac{O\Delta}{OA - O\Delta} = \frac{O\Gamma}{OB - O\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{AB - \Delta\Gamma} \quad \text{ή}$$

$$\frac{O\Delta}{\Delta A} = \frac{O\Gamma}{\Gamma B} = \frac{20}{50}, \text{ απ' όπου } O\Delta = 12 \text{ cm}, O\Gamma = 16 \text{ cm}.$$

Αφού $12^2 + 16^2 = 20^2$, τότε τρίγωνο $O\Delta\Gamma$ ορθογώνιο στο $\hat{O}$.

$$\beta) (AB\Gamma\Delta) = (OAB) - (O\Delta\Gamma) = \frac{42 \cdot 56}{2} - \frac{12 \cdot 16}{2} = 1080 \text{ cm}^2.$$



47. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει: $\mu_a = v_a$, όμως $v_a = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Όμοια } \mu_\beta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}, \mu_\gamma = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Άρα } \mu_a^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 3 \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 3 \frac{\alpha^2 \sqrt{3} \sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

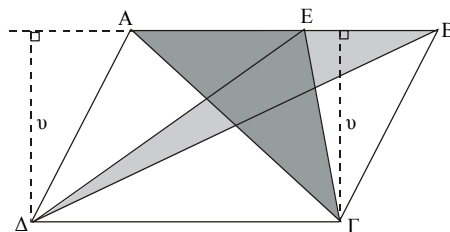
$$\text{Όμως } \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4} = E \quad (2)$$

$$\text{Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται: } \mu_a^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 3E\sqrt{3}.$$

$$48. (E\Delta B) = \frac{EB \cdot v}{2} \quad (AE\Gamma) = \frac{EA \cdot v}{2}$$

$$(E\Delta B) + (AE\Gamma) = (EB + EA) \frac{v}{2} =$$

$$= \frac{AB \cdot v}{2} = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{2}$$

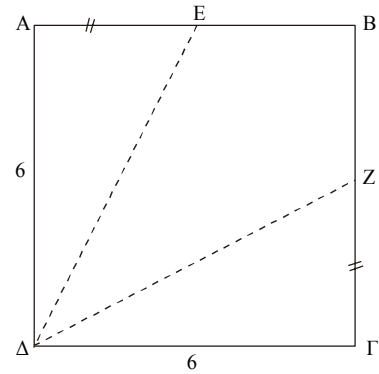


49. $(AE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{3}$ ή

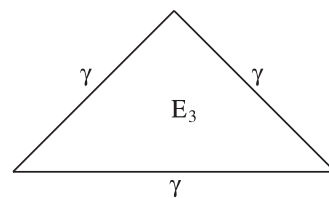
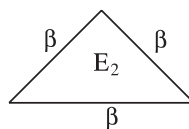
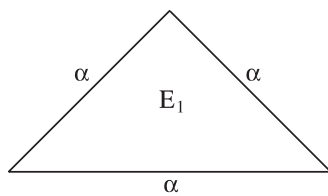
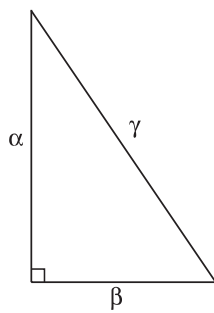
$$\frac{AE \cdot A\Delta}{2} = \frac{6^2}{3} \quad \text{ή}$$

$$\frac{AE \cdot 6}{2} = 12 \quad \text{ή} \quad AE = 4$$

Όμοια βρίσκουμε $Z\Gamma = 4$.



50.



$$E_1 = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{2}, \quad E_2 = \frac{\beta^2 \sqrt{3}}{2}, \quad E_3 = \frac{\gamma^2 \sqrt{3}}{2}$$

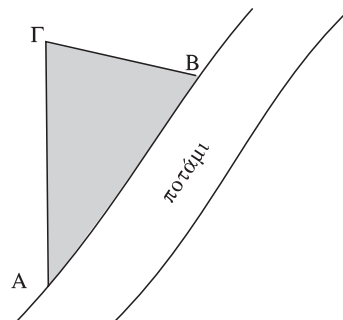
Όμως: $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, άρα $E_1 + E_2 = E_3$.

51. α) $(\text{ΑΓΒ}) = \frac{1}{2} \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ} \cdot \eta\mu\Gamma$. Παρατηρούμε

ότι αν $\eta\mu\Gamma$ γίνει μέγιστο θα έχουμε το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδό. Άρα αν $\Gamma = 90^\circ$, τότε $\eta\mu\Gamma = 1$ (μέγιστο) και

$$(\text{ΑΓΒ}) = \frac{\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}}{2} = 600 \text{ m}^2. \text{ Συνεπώς οι}$$

πρόσκοποι πρέπει να σχηματίσουν τρίγωνο με γωνία $\Gamma = 90^\circ$.



β) $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2} \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ} \cdot \eta\mu\Gamma = \frac{1}{2} 35 \cdot 35 \cdot 1 = 612,5 \text{ m}^2$

$\text{ΑΓ} + \text{ΓΒ} = 70 \text{ m}$ για να είναι μέγιστο το $\text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ πρέπει $\text{ΑΓ} = \text{ΓΒ} = 35 \text{ m}$.

Σημείωση: Είναι γνωστό ότι το γινόμενο δύο αριθμών με σταθερό άθροισμα γίνεται μέγιστο όταν οι αριθμοί γίνουν ίσοι.

52. α) $(\text{ΑΒΓΔ}) = (\alpha + \beta)^2$

β) Τα τρίγωνα ΑΖΕ , ΕΔΘ , ΘΓΗ , ΖΒΗ είναι προφανώς ίσα και ορθογώνια λόγω της κατασκευής τους (βλ. σχήμα).

Άρα $\text{ΕΖ} = \text{ΖΗ} = \text{ΗΘ} = \text{ΘΕ} = \gamma$.

Όμως: $\hat{\text{Ε}}_1 + \hat{\text{Ζ}}_1 = 90^\circ \quad \hat{\text{Ε}}_2 + \hat{\text{Θ}}_1 = 90^\circ$

$$\hat{\text{Ζ}}_1 = \hat{\text{Ε}}_2 \quad \hat{\text{Ε}}_1 = \hat{\text{Θ}}_1$$

Άρα $\hat{\text{Ε}}_1 + \hat{\text{Ε}}_2 = 90^\circ$, άρα $\hat{\text{Ε}}_3 = 90^\circ$.

Άρα το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο.

γ) Προφανώς $\Delta\Theta = \beta = \text{ΖΒ} = \text{ΗΓ} = \beta$ (βλ. (β) ερώτημα).

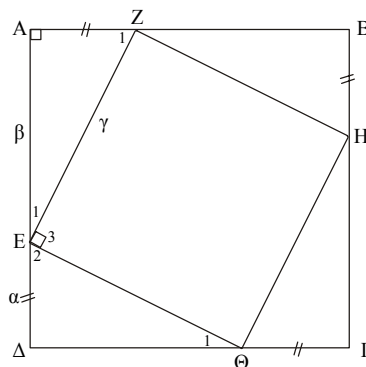
$$\text{Άρα } (\text{ΑΖΕ}) = (\text{ΕΘΔ}) = (\text{ΘΓΗ}) = (\text{ΗΒΖ}) = \frac{\alpha\beta}{2}$$

$$(\text{ΕΖΗΘ}) = \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

δ) $(\text{ΑΒΓΔ}) = \gamma^2 + 4 \frac{\alpha\beta}{2}$ αλλά $(\text{ΑΒΓΔ}) = (\alpha + \beta)^2$

$$\text{Άρα } (\alpha + \beta)^2 = \gamma^2 + 2\alpha\beta \quad \text{ή} \quad \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = \gamma^2 + 2\alpha\beta \quad \text{ή} \quad \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΖ .

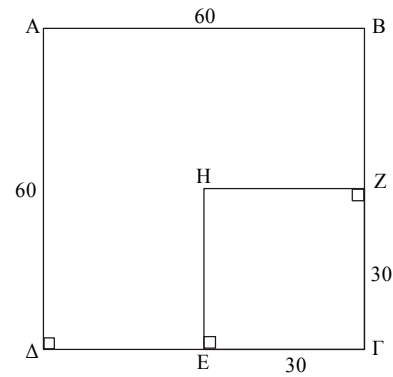


53. α) $(HZΓΕ) = 900 \text{ m}^2$

β) $(ABΓΔ) = 3600 \text{ m}^2$

$$\frac{(ABZHEΔ)}{4} = \frac{3600 - 900}{4}$$

$$= \frac{2700}{4} = 675 \text{ m}^2$$



γ) Όπως φαίνεται από το διπλανό σχήμα, τα τέσσερα οικόπεδα (I), (II), (III), (IV) έχουν αντίστοιχα προσόψεις x , $y + \omega$, z , z στον εθνικό δρόμο και πρέπει να είναι ισεμβαδικά.

Δηλαδή $E_I = E_{II} = E_{III} = E_{IV}$, απ' όπου έχουμε:

$$x \cdot 30 = y \cdot 30 + \omega \cdot 60 = z \cdot 60 = 675$$

$$\text{Απ' όπου: } z = \frac{675}{60} = 11,25 \quad (1)$$

$$x = \frac{675}{30} = 22,5 \quad (2)$$

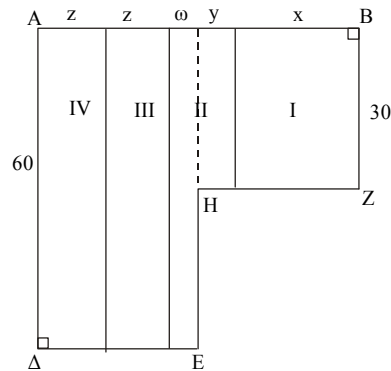
$$y + 2\omega = \frac{675}{30} = 22,5 \quad (3)$$

Αλλά $2z + \omega + y + x = 60$, η οποία λόγω των (1), (2) γίνεται:

$$2 \cdot 11,25 + \omega + y + 22,5 = 60 \quad \text{ή} \quad \omega + y = 15 \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (3) και (4) έχουμε: $y = 7,5$ και $\omega = 7,5$

Άρα η περίμετρος των E_I , E_{II} , E_{III} , E_{IV} είναι αντίστοιχα 105 m, 150 m, 135 m, 135 m.



54. α) $\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2 = 720.000 \text{ m}^2$

Άρα $\Delta B \approx 848,5 \text{ m} \approx A\Gamma$

β) $E = 90.000 \text{ m}^2$

γ) Το AZKI είναι ορθογώνιο τραπέζιο,

αφού $AZ \parallel I\Lambda$ και $\hat{Z} = 90^\circ$. Επίσης και
τα ZKΛB, ΛBEM, ΜΕΓN, ΠNΓΘ,
PΠΘΔ, ΔPΣH, ΗΣΙΑ.

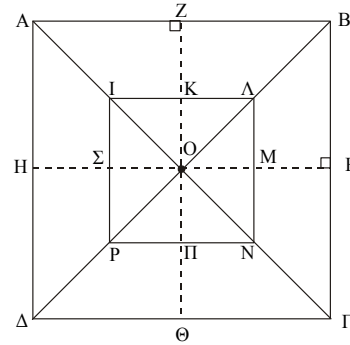
δ) i) $(AZKI) = \frac{AZ + IK}{2} KZ$

Όμως $KZ = OZ - OK = 300 - 150 = 150 \text{ m}$.

Άρα $(AZKI) = \frac{300 + 150}{2} 150 = 33750 \text{ m}^2$

ii) $AI = \frac{A\Gamma}{4} \approx 212,1$.

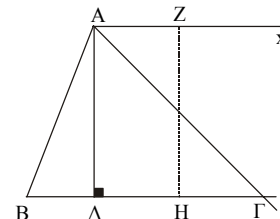
Άρα η περίμετρος Π $\approx AZ + ZK + IK + AI = 300 + 150 + 150 + 212,1$
 $= 812,1 \text{ m}$.



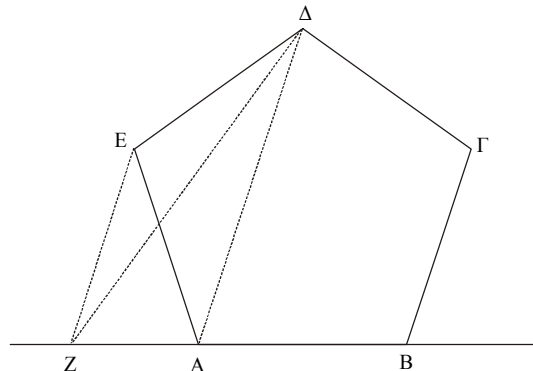
55. Φέρνουμε το ύψος AΔ και από το A ευθεία
παράλληλη προς την BΓ, την Ax. Παίρνουμε

τμήμα AZ πάνω στην Ax ώστε $AZ = \frac{B\Gamma}{2}$.

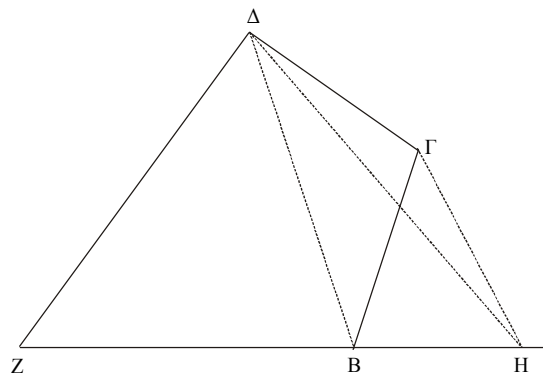
Το ζητούμενο ορθογώνιο έχει πλευρές AΔ, AZ.



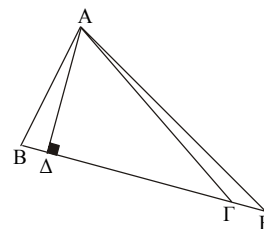
56. *A' φάση:* Από το E φέρνουμε παράλληλη προς την ΔΑ, την ΕΖ. Το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ μετασχηματίζεται σε ισοδύναμο τετράπλευρο, το ΖΒΓΔΖ.



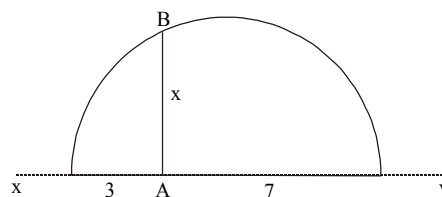
- B' φάση:* Φέρνουμε τη διαγώνιο ΔΒ και από το Γ την ΓΗ // ΔΒ. Το ΖΔΗ είναι ισοδύναμο με το τετράπλευρο ΖΔΓΒ.



57. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Πάνω στην προέκταση της ΒΓ παίρνουμε ΓΕ = ΒΔ. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι το ισοδύναμο ορθογώνιο.



58. Εάν x είναι η πλευρά του τετραγώνου, τότε $x^2 = 3 \cdot 7$. Κατασκευάζουμε το x ως μέση ανάλογο των 3 και 7. Σε ευθεία xy παίρνουμε διαδοχικά



τα τμήματα 3, 7. Με διάμετρο το 10 γράφουμε ημικύκλιο και στο σημείο A υψώνουμε κάθετο. Το μήκος του AB είναι η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου.