

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο BHO, έχουμε:

$$BH^2 = BO^2 - OH^2 \quad (1)$$

Αλλά $OH = R$, $BO = 2R$, αφού η γωνία $OBH = 30^\circ$.

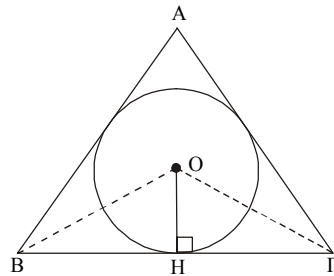
Η (1) γίνεται:

$$BH^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

$$\text{Άρα } BH = R\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

Η πλευρά a του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $a = 6\sqrt{3} \text{ cm}$.

β) Το $E_{AB\Gamma} = 3E_{BO\Gamma} = 3 \cdot \frac{1}{2} B\Gamma \cdot OH = \frac{3}{2} 6\sqrt{3} \cdot 3 = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$.



2. Η κεντρική γωνία ω του κανονικού v -γώνου δίδεται από τον τύπο:

$$\omega = \frac{360^\circ}{v}, v \in \mathbb{N} - \{1, 2\}. \text{ Με } \omega = 16^\circ \text{ έχουμε: } 16^\circ = \frac{360^\circ}{v} \text{ ή } v = \frac{360^\circ}{16^\circ} = 22,5.$$

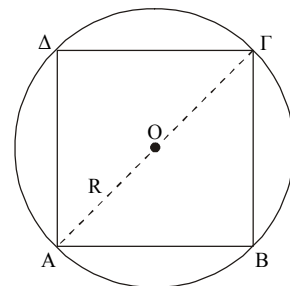
Άρα δεν υπάρχει τέτοιο κανονικό πολύγωνο.

3. α) Ισχύει $AB + B\Gamma = 80 \text{ cm}$ (1)

Αν x είναι η πλευρά του τετραγώνου, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 \text{ ή } (2R)^2 = x^2 + x^2 \text{ ή}$$

$$4R^2 = 2x^2 \text{ ή } x^2 = 2R^2. \text{ Άρα } x = R\sqrt{2} \quad (2)$$



Από (1) και (2) έχουμε: $2R\sqrt{2} = 80$ ή $R = \frac{40}{\sqrt{2}}$ ή $R = 20\sqrt{2} \text{ cm}$

- β) Η πλευρά x του τετραγώνου είναι: $x = 20\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 40 \text{ cm}$

Άρα $\lambda = \frac{E_{\text{τετραγώνου}}}{E_{\text{κύκλου}}} = \frac{40^2 \text{ cm}^2}{\pi \cdot (20\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2} = \frac{1600 \text{ cm}^2}{\pi \cdot 800 \text{ cm}^2}$, άρα $\lambda = \frac{2}{\pi}$

4. α) Ισχύει $A\Gamma - AB = 12 \text{ cm}$ (1)

Αν x η πλευρά του τετραγώνου, τότε:

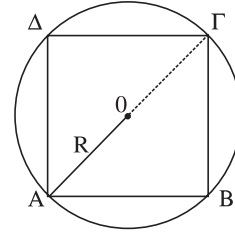
$$2R = x\sqrt{2} \text{ ή } x = R\sqrt{2} \quad (2)$$

Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$2R - R\sqrt{2} = 12 \text{ ή } R(2 - \sqrt{2}) = 12 \text{ ή}$$

$$R = \frac{12}{2 - \sqrt{2}} = \frac{12(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{12(2 + \sqrt{2})}{2^2 - 2} \text{ ή } R = 6(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$$

β) $E = \pi R^2 = \pi [6(2 + \sqrt{2})]^2 \text{ ή } E = 72\pi(3 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2$



5. α) Ισχύει $\lambda_4 + \lambda_3 = 96 \text{ cm}$ (1)

με $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, $\lambda_3 = R\sqrt{3}$, η σχέση (1) γίνεται:

$$R\sqrt{2} + R\sqrt{3} = 96 \text{ ή } R(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 96 \text{ ή}$$

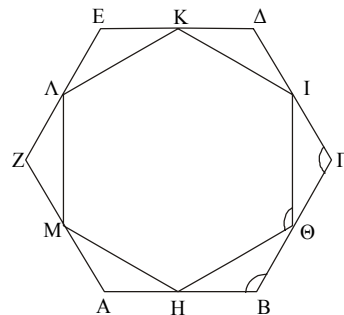
$$R = \frac{96}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{96(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$R = 96(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ cm}$$

β) $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{96(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \alpha_4 = 48(\sqrt{6} - 2) \text{ cm}$

$$\alpha_3 = \frac{R}{2} = \frac{96(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} \text{ ή } \alpha_3 = 48(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ cm}$$

6. Το εξάγωνο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του κανονικού εξαγώνου $AB\Gamma\Delta E Z$ είναι το $H\Theta I K \Lambda M$. Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $HB\Theta$, $\Theta\Gamma I$, παρατηρούμε ότι έχουν $HB = B\Theta = \Theta\Gamma = \Gamma I$ και γωνίες $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 120^\circ$.



Άρα αυτά είναι ίσα και άρα $H\Theta = \Theta I$. Επίσης, η γωνία $\widehat{H\Theta I} = 120^\circ$.

Γενικεύοντας ισχύει $H\Theta = \Theta I = \dots = MH$ και $\widehat{\Theta} = \widehat{I} = \widehat{K} = \dots = \widehat{H} = 120^\circ$.

Άρα το εξάγωνο $H\Theta IK\Lambda M$ είναι κανονικό.

7. Τα δύο κανονικά οκτάγωνα είναι όμοια πολύγωνα και ο λόγος ομοιότητας λ ισούται με το λόγο των αποστημάτων τους, δηλαδή $\lambda = \frac{\alpha_8}{\alpha'_8} = \frac{3}{4}$.

α) Ο λόγος των περιμέτρων του ισούται με το λόγο ομοιότητας, δηλαδή

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{3}{4}.$$

β) Ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητάς τους, δηλαδή $\frac{E}{E'} = \frac{9}{16}$.

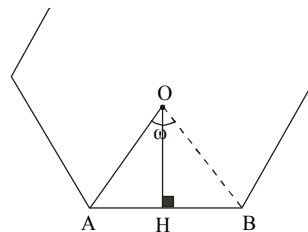
8. α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OHA εφαρμόζουμε

Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$$AH^2 = AO^2 - OH^2 \text{ ή}$$

$$AH^2 = 8^2 - (4\sqrt{3})^2 = 64 - 16 \cdot 3 = 16.$$

Άρα $AH = 4$ cm και $AB = \lambda_v = 8$ cm



β) Στο τρίγωνο OAB , η $OA = AB = 8$ cm, δηλαδή $R = \lambda_v$. Άρα το τρίγωνο

OAB είναι ισόπλευρο, άρα γωνία $\widehat{O} = 60^\circ$.

γ) Το πλήθος των πλευρών n του κανονικού πολυγώνου είναι:

$$n = \frac{360^\circ}{\omega} \text{ ή } n = \frac{360^\circ}{60^\circ} \text{ ή } n = 6, \text{ πρόκειται δηλαδή για κανονικό εξάγωνο.}$$

9. α) Η πλευρά $AB = 6$ cm είναι η πλευρά του κανονικού εξαγώνου του εγγεγραμμένου στον κύκλο (O, R) .

Άρα $AB = \lambda_6 = R = 6$ cm. Επομένως η πλευρά $AG = \lambda_3 = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm.

- β) $AB = \lambda_6 = 6$ cm

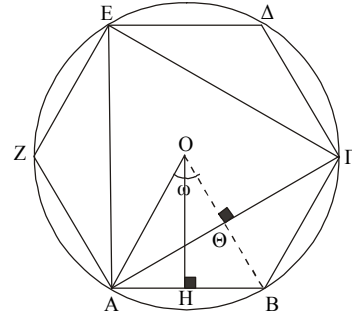
$$OH = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$AG = \lambda_3 = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$O\Theta = \alpha_3 = \frac{R}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm.}$$

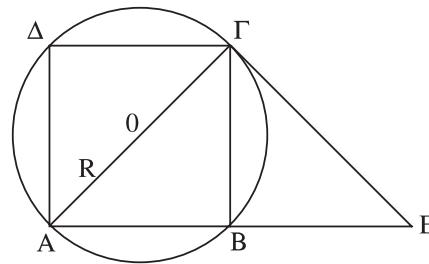
$$\text{Επομένως: } \lambda = \frac{(AB\Gamma\Delta EZ)}{(A\Gamma E)} = \frac{6(OAB)}{3(OAG)} = \frac{6 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OH}{3 \cdot \frac{1}{2} AG \cdot O\Theta} = \frac{2AB \cdot OH}{AG \cdot O\Theta},$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3} \cdot 3} = 2$$



10. α) Στο τρίγωνο $A\Gamma E$ η ΓB είναι διάμεσος (αφού $AB = BE$) και ύψος (αφού η γωνία $B = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο).

Άρα το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές και άρα $AG = GE$.



- β) Στο τρίγωνο $A\Gamma E$ οι γωνίες $\hat{A} = \hat{E} = 45^\circ$. Άρα η γωνία $\hat{A}\Gamma E = 90^\circ$. Άρα η ΓE είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ .

$$\gamma) (A\Gamma E) = \frac{AG \cdot GE}{2} = \frac{2R \cdot 2R}{2} = 2R^2$$

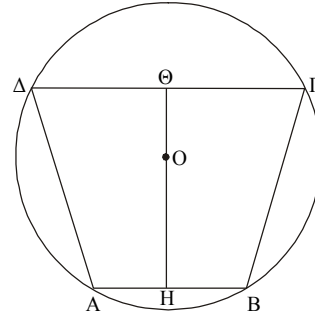
$$11. \alpha) \hat{\Delta A} = 360^\circ - (\hat{AB} + \hat{B\Gamma} + \hat{\Gamma\Delta}) =$$

$$360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 90^\circ$$

$$\text{Άρα } \hat{\Delta A} = \hat{B\Gamma} = 90^\circ.$$

Άρα οι χορδές ΑΔ και ΒΓ είναι ίσες και
επιπλέον $AB \parallel \Gamma\Delta$ ($\hat{B} = 105^\circ, \hat{\Gamma} = 75^\circ$).

Άρα ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο.



$$\beta) \hat{AB} = 60^\circ, \text{ άρα η χορδή } AB = \lambda_6 = R$$

$$\hat{B\Gamma} = 90^\circ, \text{ άρα η χορδή } B\Gamma = \lambda_4 = R\sqrt{2}$$

$$\hat{\Gamma\Delta} = 120^\circ, \text{ άρα η χορδή } \Gamma\Delta = \lambda_3 = R\sqrt{3}$$

$$\hat{\Delta A} = 90^\circ, \text{ άρα η χορδή } A\Delta = \lambda_4 = R\sqrt{2}$$

$$\gamma) E = \frac{1}{2} (AB + \Gamma\Delta) H\Theta \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } OH = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \quad O\Theta = \alpha_3 = \frac{R}{2}$$

$$\text{Άρα } H\Theta = OH + O\Theta = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = \frac{R(\sqrt{3} + 1)}{2} \quad (2)$$

Η (1) λόγω της (2) και του (β) ερωτήματος γίνεται:

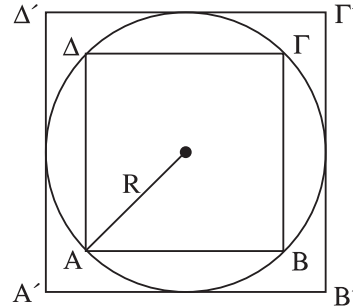
$$E = \frac{1}{2} (R + R\sqrt{3}) \frac{R(\sqrt{3} + 1)}{2} = \frac{R^2 (\sqrt{3} + 1)^2}{4}$$

12. α) $AB = \lambda_4$, $A'B' = \lambda_4'$, $A\Gamma = \delta = 2R$
(δ διαγώνιος του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$)

$$\text{Άρα } \delta = 2R = AB\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad AB = \frac{2R}{\sqrt{2}} \quad \text{ή}$$

$$AB = \lambda_4 = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \quad \text{ή} \quad \lambda_4 = R\sqrt{2} \quad \text{και}$$

$$A'B' = \lambda_4' = 2R.$$



$$\beta) \lambda = \frac{E}{E'} = \frac{\lambda_4^2}{\lambda_4'^2} = \frac{(R\sqrt{2})^2}{(2R)^2} = \frac{2R^2}{4R^2} = \frac{1}{2}$$

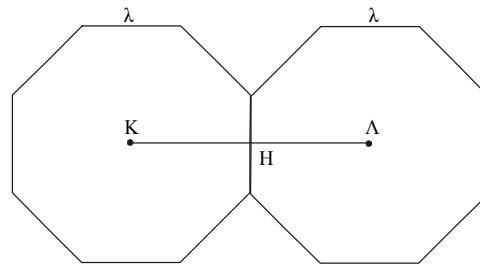
13. Η απόσταση

$$KL = KH + HL =$$

$$\alpha_6 + \alpha_6 = 2\alpha_6 = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

$$\text{Αλλά } \lambda_6 = R = \lambda.$$

$$\text{Άρα } KL = \lambda\sqrt{3}.$$



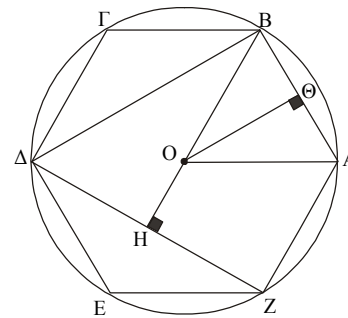
14. α) Έχουμε με $R = 3$ cm:

$$AB = \lambda_6 = 3 \text{ cm}, \quad O\Theta = \alpha_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$OH = \alpha_3 = \frac{3}{2} \text{ cm}, \quad \Delta Z = \lambda_3 = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\text{Άρα } E_{AB\Gamma\Delta EZ} = 6 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot O\Theta =$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$



$$\beta) E = E_{AB\Gamma\Delta EZ} - E_{ZB\Delta} = \frac{27\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \Delta Z \cdot OH =$$

$$\frac{27\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{4}. \quad \text{Άρα } E = \frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

15. α) Η κεντρική γωνία ω του κανονικού εγγεγραμμένου πολυγώνου είναι:

$$\hat{\omega} = \frac{4}{3} L \quad \text{ή} \quad \hat{\omega} = 120^\circ. \quad \text{Αλλά ισχύει} \quad \hat{\omega} = \frac{360^\circ}{\nu} \quad \text{με} \quad \nu \quad \text{τον αριθμό των}$$

πλευρών του κανονικού πολυγώνου. Άρα $\nu = \frac{360^\circ}{120^\circ}, \nu = 3$

β) Η πλευρά λ_3 του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ και το απόστημά του $\alpha_3 = \frac{R}{2}$. Άρα το εμβαδόν του υπολογίζεται:

$$E = 3 \cdot \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} \quad \text{ή} \quad E = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

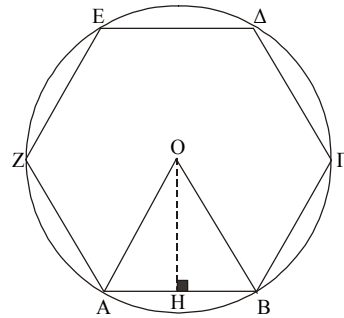
16. α) $AB = \lambda_6 = R \quad OH = \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$$E_{\text{ΑΒΓΔΕΖ}} = 6 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OH =$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$

β) $E = \pi R^2 - E_{\text{ΑΒΓΔΕΖ}} = \pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} =$

$$\frac{2\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2}{2} (2\pi - 3\sqrt{3})$$



17. α) Η ακτίνα του κύκλου είναι $\frac{\alpha}{2}$. Άρα το

εμβαδόν του κύκλου είναι:

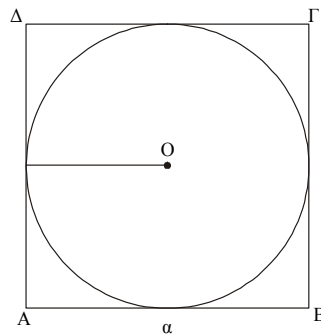
$$E = \pi \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{4} \quad (1)$$

β) Το εμβαδό του τετραγώνου είναι:

$$E_{\text{ΑΒΓΔ}} = \alpha^2 \quad (2)$$

Με αφαίρεση της (1) από τη (2) έχουμε το ζητούμενο εμβαδό:

$$E = \alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{4} = \frac{4\alpha^2 - \pi\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} (4 - \pi)$$



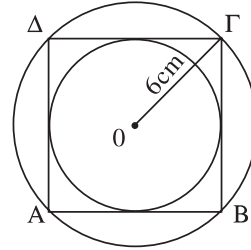
18. α) Αν λ_4 είναι η πλευρά του τετραγώνου, τότε

$$\lambda_4 = R\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad \lambda_4 = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$\text{Επομένως } E_{AB\Gamma\Delta} = (6\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2.$$

β) Η ακτίνα του εξωτερικού κύκλου είναι $R = 6 \text{ cm}$
και η ακτίνα του εσωτερικού κύκλου είναι
 $\rho = 3\sqrt{2} \text{ cm}$. Άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι:

$$\lambda = \frac{\pi \cdot 6^2}{\pi \cdot (3\sqrt{2})^2} = \frac{36}{18} = 2$$



19. α) Η ΑΒ είναι πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου

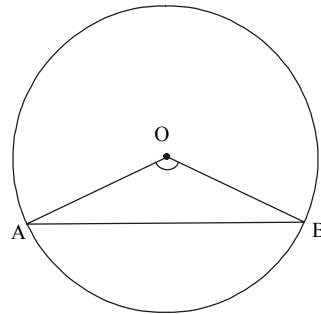
εγγεγραμμένου σε κύκλο. Άρα $\hat{O} = 120^\circ$.

Επομένως:

$$S_{\hat{A}B} = \frac{\pi \cdot R \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2}{3} \pi R$$

β) Για το εμβαδό του κυκλικού τομέα ΑΟΒ έχουμε:

$$E_{\text{κ.τομ.}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{3}$$



20. α) Στο ορθογώνιο

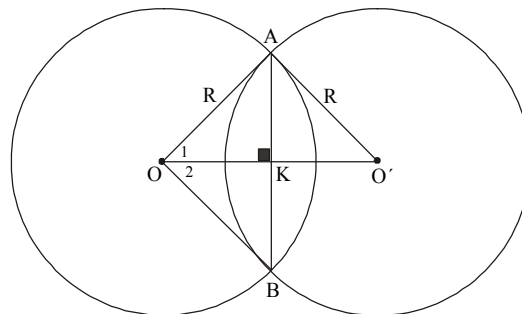
τρίγωνο ΟΚΑ με ΟΑ

$$= R \text{ και } OK = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

εφαρμόζουμε

πυθαγόρειο θεώρημα

και έχουμε:



$$AK^2 = OA^2 - OK^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{2R^2}{4} = \frac{2R^2}{4} = \frac{R^2}{2}$$

Άρα $AK = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ και επομένως το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ είναι ισοσκελές.

Άρα $\hat{O}_1 = 45^\circ$, άρα $\hat{O} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$. Επομένως:

$$E_{\hat{A}OB} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{4} \quad (1)$$

$$\beta) E = 2 [E_{\hat{A}OB} - E_{AOB}] \quad (2)$$

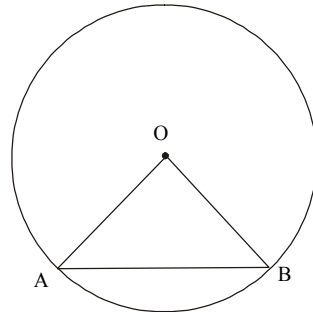
$$\text{Αλλά } E_{AOB} = \frac{R^2}{2} \quad (3)$$

$$\text{Από (1) και (3) η σχέση (2) γίνεται: } E = 2 \left[\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \right] = \frac{R^2}{2} (\pi - 2)$$

21. α) Για τον υπολογισμό του εμβαδού του μικρότερου κυκλικού τμήματος αφαιρούμε από το εμβαδό του κυκλικού τομέα ΑΟΒ το εμβαδό του τριγώνου ΑΟΒ.

$$E_{\hat{A}OB} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{4} \quad (1)$$

$$E_{AOB} = \frac{AO^2}{2} = \frac{R^2}{2} \quad (2)$$



Το ζητούμενο εμβαδόν σύμφωνα με τις (1), (2) είναι:

$$E = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4} (\pi - 2) \quad (3)$$

- β) Για τον υπολογισμό του μεγαλύτερου κυκλικού τμήματος αφαιρούμε από το εμβαδό του κύκλου το εμβαδό της σχέσης (3) και έχουμε:

$$E = \pi R^2 - \frac{R^2}{4} (\pi - 2) \quad E = \frac{R^2}{4} (3\pi + 2)$$