

22. α) Είναι $AO = OG$, $OH \perp AD$, τότε $OH \parallel \Delta\Gamma$.

Στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ η $OH = \parallel \frac{\Delta\Gamma}{2}$ ή

$$\Delta\Gamma = 2OH = 2R.$$

$$E_{AB\Gamma\Delta} = \Delta\Gamma^2 = (2R)^2 = 4R^2$$

β) Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $2R$ η

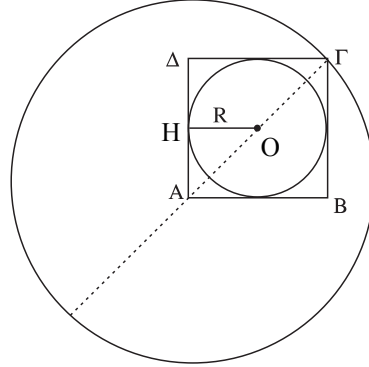
$A\Gamma$ διαγώνιός του. Τότε ισχύει:

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2 = (2R)^2 +$$

$$(2R)^2 \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2 = 8R^2$$

Ο λόγος εμβαδών των δύο κύκλων $(A, A\Gamma)$, (O, R) είναι:

$$\frac{E_{(A, A\Gamma)}}{E_{(O, R)}} = \frac{\pi A\Gamma^2}{\pi R^2} = \frac{\pi 8R^2}{\pi R^2} = 8$$



23. Το τρίγωνο $\Delta O\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο O και
ισοσκελές ($\Delta O = O\Gamma$). Επίσης $OH \perp \Delta\Gamma$.
Άρα $\Delta H = H\Gamma = \alpha$ και $OH = \alpha$.

Στο τρίγωνο $OH\Delta$, $\hat{\Delta}_1 = 45^\circ$, $\hat{H} = 90^\circ$.

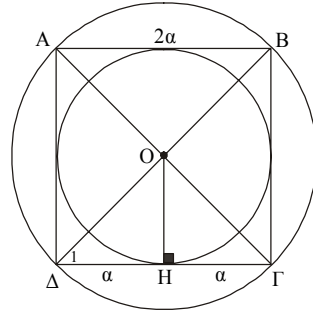
Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\Delta O^2 = \Delta H^2 + HO^2,$$

$$\Delta O^2 = \alpha^2 + \alpha^2 \quad \text{ή} \quad \Delta O^2 = 2\alpha^2 \quad (1)$$

$$\alpha) E_{(O, OH)} = \pi \cdot OH^2 = \pi \alpha^2$$

$$\beta) E_{(O, O\Delta)} = \pi \cdot O\Delta^2 \stackrel{(1)}{=} \pi \cdot 2\alpha^2, \quad \text{άρα:} \quad \frac{E_{(O, O\Delta)}}{E_{(O, OH)}} = \frac{2\pi \alpha^2}{\pi \alpha^2} = 2$$

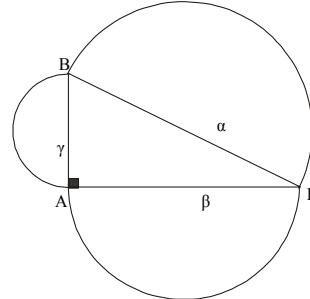


24. Για το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad \text{ή} \quad \frac{\pi \alpha^2}{4} = \frac{\pi \beta^2}{4} + \frac{\pi \gamma^2}{4} \quad \text{ή}$$

$$\pi \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 = \pi \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \quad \text{ή}$$

$$E_\alpha = E_\beta + E_\gamma$$



Με E_α συμβολίζουμε το εμβαδό του κύκλου με διάμετρο α

Με E_β συμβολίζουμε το εμβαδό του κύκλου με διάμετρο β

Με E_γ συμβολίζουμε το εμβαδό του κύκλου με διάμετρο γ .

25. α) Είναι $OA = OB = R$, $E_{OAB} = \frac{1}{2} RR = \frac{R^2}{2}$

β) $E_{\text{ΜΗΝΙΣΚΟΥ}} =$

$$E_{\text{ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ (Κ, ΚΒ)}} - [E_{\text{ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ ΑΟΒ}} - E_{\text{ΑΟΒ}}]$$

(I)

Στο ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο OAB

($OA = OB = R$, $\hat{O} = 90^\circ$) έχουμε:

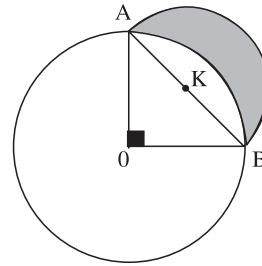
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \quad \text{ή} \quad (2KB)^2 = R^2 + R^2 \quad \text{ή} \quad 4KB^2 = 2R^2 \quad \text{ή} \quad KB^2 = \frac{R^2}{2} \quad (1)$$

$$E_{\text{ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ (Κ, ΚΒ)}} = \frac{\pi KB^2}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{\pi \frac{R^2}{2}}{2} = \frac{\pi R^2}{4} \quad (2)$$

$$E_{\text{ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ ΑΟΒ}} - E_{\text{ΑΟΒ}} = \frac{\pi R^2 90}{360} - \frac{R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \quad (3)$$

Από την ισότητα (I):

$$E_{\text{ΜΗΝΙΣΚΟΥ}} = E_{\text{ΗΜΙΚΥΚΛΙΟΥ (Κ, ΚΒ)}} - [E_{\text{ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ ΑΟΒ}} - E_{\text{ΑΟΒ}}] \stackrel{(2),(3)}{=} \frac{\pi R^2}{4} - \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \right) = \frac{R^2}{2}$$



26. Αν $\hat{\omega}$ είναι η κεντρική γωνία του κανονικού πενταγώνου τότε:

$$\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{5} \quad \text{ή} \quad \hat{\omega} = 72^\circ$$

Αν $\hat{\phi}$ η εσωτερική γωνία του κανονικού πενταγώνου είναι:

$$\hat{\phi} + \hat{\omega} = 180^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{\phi} = 180^\circ - 72^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{\phi} = 108^\circ$$

Στο τρίγωνο ABE είναι $AB = AE$ (ισοσκελές), άρα:

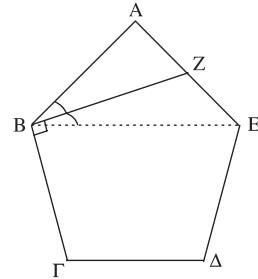
$$\hat{ABE} = \hat{AEB}, \text{ τότε } 2\hat{ABE} + \hat{A} = 180^\circ \quad \text{ή} \quad 2\hat{ABE} = 180^\circ - 108^\circ \quad \text{ή}$$

$$2\hat{ABE} = 72^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{ABE} = 36^\circ$$

$$\text{Η } \hat{EB\Gamma} = \hat{AB\Gamma} - \hat{ABE} \quad \text{ή} \quad \hat{EB\Gamma} = 108^\circ - 36^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{EB\Gamma} = 72^\circ.$$

$$\text{Όμως } \hat{ZB\Gamma} = \hat{ZBE} + \hat{EB\Gamma} = \frac{\hat{ABE}}{2} + \hat{EB\Gamma} = \frac{36^\circ}{2} + 72^\circ = 18^\circ + 72^\circ = 90^\circ$$

Άρα $ZB \perp B\Gamma$.



27. Από την προηγούμενη λύση της (26), έχουμε: $\hat{EB\Gamma} = 72^\circ$ και $\hat{B\Gamma\Delta} = 108^\circ$,
 άρα $\hat{EB\Gamma} + \hat{B\Gamma\Delta} = 72^\circ + 108^\circ = 180^\circ$. Τότε $BE \parallel \Gamma\Delta$, αφού οι εντός και επί
 τα αυτά των BE, $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από τη BΓ είναι παραπληρωματικές.

28. Από το σχήμα: $OH = 3 \text{ cm}$, $OB = x$, $HB = \frac{x}{2}$.

Στο $\triangle OHB$: $OB^2 = OH^2 + HB^2$ ή

$$x^2 = 3^2 + \frac{x^4}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{3x^2}{4} = 9 \quad \text{ή} \quad x^2 = 12 \quad \text{ή}$$

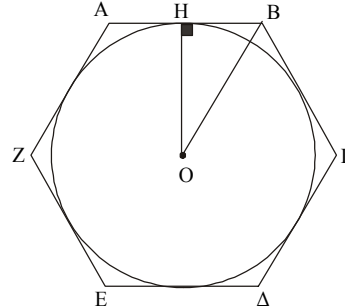
$$x = 2\sqrt{3} \text{ cm. Όμως:}$$

$$\alpha'_6 = OH = 3 \text{ cm, } AB = 2HB \quad \text{ή} \quad AB = x = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Άρα } \alpha) \lambda'_6 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\beta) \alpha'_6 = 3 \text{ cm}$$

$$\gamma) E_{AB\Gamma\Delta EZH} = 6E_{AOB} = 6 \frac{\lambda'_6 \alpha'_6}{2} = 6 \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



29. Είναι $\lambda_3 = 9 \text{ cm}$. Γνωρίζουμε ότι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$, τότε $R\sqrt{3} = 9$ ή $R = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

$$\alpha) \text{ Το μήκος του κύκλου } L = 2\pi R = 2\pi \cdot 3\sqrt{3} = 6\pi\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\beta) E_{\text{τριών κυκλικών τμημάτων εκτός τριγώνου}} = \pi R^2 - E_{\text{ισοπλευρ.}} = \pi (3\sqrt{3})^2 - \frac{\lambda_3^2 \sqrt{3}}{4} =$$

$$27\pi - \frac{9^2 \sqrt{3}}{4} = (27\pi - \frac{81\sqrt{3}}{4}) \text{ cm}^2 = 9(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}) \text{ cm}^2.$$

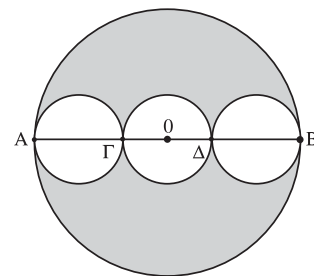
$$30. \alpha) \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 = \pi \left(\frac{6\alpha}{2} \right)^2 = \pi (3\alpha)^2 = 9\pi\alpha^2, AB = 6\alpha$$

$$\beta) \text{ Είναι } A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B = \frac{AB}{3} = \frac{6\alpha}{3} = 2\alpha.$$

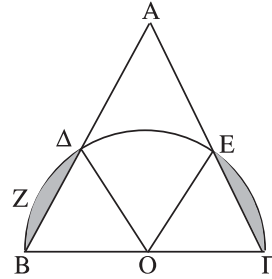
$$\text{Τότε } \pi \left(\frac{A\Gamma}{2} \right)^2 = \pi \left(\frac{2\alpha}{2} \right)^2 = \pi\alpha^2$$

$$\gamma) \text{ Από το (α) και το (β) έχουμε: } \frac{3\pi\alpha^2}{9\pi\alpha^2} = \frac{1}{3}$$

$$\delta) E_{\text{γραμμοσκιασμένο}} = E_{(O, OA)} - 3E_{\text{μικρού κύκλου}} = 9\pi\alpha^2 - 3\pi\alpha^2 = 6\pi\alpha^2$$



31. α) Το τρίγωνο OBA είναι ισοσκελές ($OB = OA$)
 με $\hat{B} = 60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο. Το ίδιο και
 για το τρίγωνο OEG.



β) Είναι: $E_{\text{κυκλικού τομέα OAZB}} = \frac{\pi(OB)^2 \cdot 60}{360} =$

$$= \frac{\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{6} = \frac{\pi\alpha^2}{24}$$

- γ) Τα εμβαδά των δύο γραμμοσκιασμένων κυκλικών τμημάτων είναι:

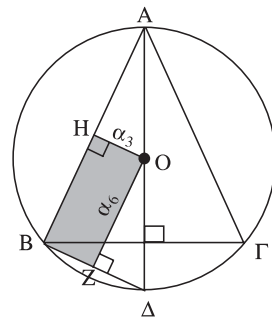
$$E = 2 \left(\frac{\pi\alpha^2}{24} - E_{\Delta BO} \right) = 2 \left(\frac{\pi\alpha^2}{24} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \right) = 2 \left(\frac{\pi\alpha^2}{24} - \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{16} \right) =$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{12} - \frac{\sqrt{3}\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

32. Είναι: $\frac{E_{\text{εγ/νου}}}{E_{\text{περ/νου}}} = \left(\frac{\alpha_3}{\alpha'_3} \right)^2 = \left(\frac{R/2}{R} \right)^2 = \frac{1}{4}$

33. α) Η $\hat{AB\Delta} = 90^\circ$ γιατί βαίνει σε ημικύκλιο
 $\alpha_3 \perp AB$, $\alpha_6 \perp B\Delta$, τότε $\alpha_3 \perp \alpha_6$

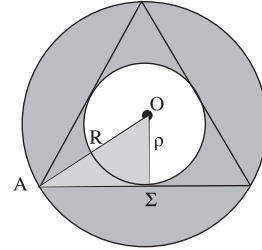
β) $E_{AOB} = \frac{\alpha_3 \cdot AB}{2} = \frac{\frac{R}{2} \cdot R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$
 $E_{OBA} = \frac{\alpha_6 \cdot B\Delta}{2} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot R}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4},$
 τότε: $E_{AOB} = E_{OBA}$



34. $E_{\text{στεφαν.}} = \pi R^2 - \pi \rho^2 = \pi (R^2 - \rho^2) = \pi \cdot A\Sigma^2$

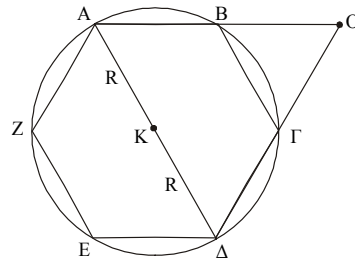
Όμως $E_{OAS} = \frac{A\Sigma \cdot \rho}{2}$ ή $\frac{2E_{OAS}}{\rho} = A\Sigma$, τότε:

$$E_{\text{στεφαν.}} = \pi A\Sigma^2 = \pi \left(\frac{2E_{OAS}}{\rho} \right)^2 = \pi \frac{4E_{OAS}^2}{\rho^2}$$



35. Το τρίγωνο OAD είναι ισόπλευρο με πλευρά $AD = 2R$. Άρα:

$$E_{OAD} = \frac{(2R)^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \sqrt{3}$$



36. $E_{\text{ισοπλ.}} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$, όμως $E_{\text{ισοπλ.}} = 3 \frac{\lambda_3 \alpha_3}{2} = \frac{3R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2}}{2} = \frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}$

Τότε: $\frac{3R^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ ή $R^2 = 16$ ή $R = 4 \text{ cm}$

α) $\lambda_4 = \sqrt{2} R$ ή $\lambda_4 = \sqrt{2} \cdot 4$ ή $\lambda_4 = 4\sqrt{2} \text{ cm}$

β) $\alpha_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} R$ ή $\alpha_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4$ ή $\alpha_4 = 2\sqrt{2} \text{ cm}$

γ) $E_4 = \lambda_4^2$ ή $E_4 = (4\sqrt{2})^2$ ή $E_4 = 32 \text{ cm}^2$

37. α) Πλευρά τετραγώνου $= 2 \cdot 40 = 80 \text{ m}$

β) Αξία χωραφίου $= 80^2 \cdot 10.000 = 64.000.000 \text{ δρχ.}$

γ) $E_{\text{ζητούμενο}} = 80^2 - \pi \cdot 40^2 = 6400 - 1600\pi = 1600(4 - \pi) \text{ m}^2$

38. Είναι διάμετρος $\delta = 0,5 \text{ m}$, $L_{\text{τροχού}} = 2\pi \frac{\delta}{2} = \pi \cdot 0,5 \text{ m}$

Αν n ο αριθμός στροφών, τότε $n \cdot L_{\text{τροχού}} = 1.000 \text{ m}$ ή $n = \frac{1000}{L_{\text{τροχού}}}$ ή

$$n = \frac{1000}{0,5\pi} = \frac{2000}{\pi} \text{ στροφές.}$$

39. α) Στο κυκλικό πάρκο $R = 6 \text{ m}$ θα εγγραφεί τετράγωνο πλευράς $\lambda_4 = R\sqrt{2}$
ή $\lambda_4 = 6\sqrt{2}$, $E_4 = (6\sqrt{2})^2 = 72 \text{ m}^2$. Δηλαδή θα χρειαστούν 72:0,09
πλακάκια = 800 πλακάκια.

β) Αν E το μέρος που δεν έχει πλακάκια, θα είναι:

$$E = \pi R^2 - \lambda_4^2 \text{ ή } E = \pi 6^2 - (6\sqrt{2})^2 \text{ ή } E \approx 3,14 \cdot 36 - 72 \text{ ή } E \approx 41,04 \text{ m}^2$$

Το κόστος είναι $41,04 \cdot 3.000 = 123.120 \text{ δρχ.}$