

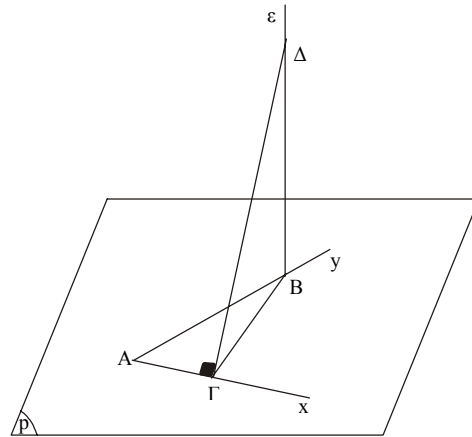
Ερωτήσεις ανάπτυξης

- ** Δίνονται επίπεδο p και τρία μη συνευθειακά σημεία του A, B και Γ καθώς και ένα σημείο M , που δεν συμπίπτει με το A . Αν η ευθεία AM τέμνει την ευθεία $B\Gamma$, να δείξετε ότι το M είναι σημείο του επιπέδου p .**
- ** Να δείξετε ότι κάθε ευθεία ε που ορίζεται από ένα σημείο A ενός επιπέδου p και από ένα άλλο σημείο B που βρίσκεται εκτός του επιπέδου δεν έχει άλλο κοινό σημείο με το επίπεδο εκτός του A .**
- ** Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2 και τυχαίο σημείο A της ε_1 . Να δείξετε ότι:**
 - Το A και η ε_2 ορίζουν ένα επίπεδο.
 - Το επίπεδο αυτό έχει με την ε_1 κοινό μόνο το σημείο A .
- ** Δύο κύκλοι (O_1, R_1) και (O_2, R_2) τέμνονται στα σημεία A και B . Έστω Γ το σημείο τομής της AB με την O_1O_2 ($\Gamma \neq O_1, O_2$). Να δείξετε ότι οι κύκλοι αυτοί ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.**
- ** Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2 και A, B αντίστοιχα σημεία των ευθειών ε_1 και ε_2 . Να δείξετε ότι**
 - Τα ζεύγη (A, ε_2) και (B, ε_1) ορίζουν αντίστοιχα δύο επίπεδα p και q .
 - Η τομή των επιπέδων p και q είναι η ευθεία AB .
- ** Έστω επίπεδο p και δύο παράλληλες ευθείες του ε_1 και ε_2 . Δύο επίπεδα q, t έχουν τομές με το p τις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Αν q, t τέμνονται κατά την ε_3 να δείξετε ότι η ε_3 :**
 - Είναι παράλληλη προς τις ευθείες ε_1 και ε_2 .
 - Δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το p .

7. ** Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $(A\Delta // B\Gamma)$ και σημείο K , που δεν ανήκει στο επίπεδο p του τραπέζιου. Να κατασκευάσετε την τομή των επιπέδων (K, A, B) και (K, Γ, Δ) αφού προσδιορίσετε προηγουμένως ένα ακόμη σημείο του p , που μαζί με το σημείο K θα την ορίζει.
8. ** Αν K το περίκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$ και ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου στο σημείο K , να δείξετε ότι κάθε σημείο O της ε ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.
9. ** Δίνεται επίπεδο p και ένα σημείο K που δεν ανήκει στο p και απέχει από αυτό απόσταση α . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του p τα οποία απέχουν από το K απόσταση λ ($\lambda > \alpha$).
10. ** Δίνεται κύκλος (O, R) και σε σημείο του A ένα εφαπτόμενο τμήμα $AB = R\sqrt{2}$. Πάνω στη κάθετη ευθεία προς το επίπεδο του κύκλου στο σημείο O παίρνουμε τμήμα $OG = R\sqrt{6}$. Να υπολογίσετε τα τμήματα:
 α) AG .
 β) $B\Gamma$.
11. ** Από σημείο K εκτός επιπέδου p φέρουμε κάθετη KO στο p και τις πλάγιες προς αυτό KA και KB . Αν στις KO , KA και KB πάρουμε σημεία Γ , Δ , E αντίστοιχα έτσι ώστε να ισχύει $\frac{K\Gamma}{KO} = \frac{K\Delta}{KA} = \frac{KE}{KB}$ να δείξετε ότι:
 α) Η $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλη προς την OA .
 β) Η ΓE είναι παράλληλη προς την OB .
 γ) Η KO είναι κάθετη στο επίπεδο (Γ, Δ, E)
12. ** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε από το μέσο M της υποτεινούσας $B\Gamma$ ευθεία ε κάθετη στο επίπεδό του. Να δείξετε ότι για κάθε σημείο K της ευθείας ε ισχύει $KA = KB = K\Gamma$.

13. ** Δίνονται δύο σημεία A και B ενός επιπέδου p και σημείο Γ έξω από το επίπεδο p . Το Γ απέχει από το επίπεδο p απόσταση $\Gamma\Delta = 8$ cm και από το τμήμα AB απόσταση $\Gamma Z = 10$ cm. Να δείξετε ότι $\frac{(\Delta AB)}{(\Gamma AB)} = \frac{3}{5}$.

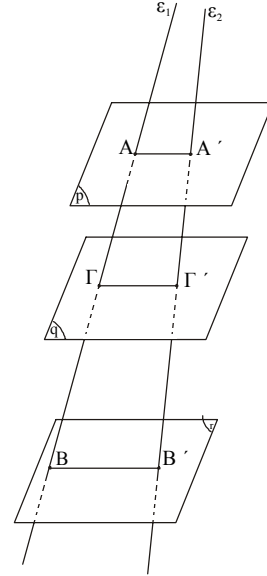
14. ** Δίνεται $\hat{xAy} = 60^\circ$ σε επίπεδο p και στην πλευρά Ay παίρνουμε σημείο B έτσι ώστε $AB = 6$ cm και φέρουμε από το B κάθετη ευθεία ε στο επίπεδο p . Αν επί της ε πάρουμε τμήμα $B\Delta = 10$ cm και είναι $\Delta\Gamma \perp Ax$:
- α) Να δείξετε ότι $B\Gamma \perp A\Gamma$.
 β) Να βρείτε την απόσταση $\Gamma\Delta$.



15. *** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του χώρου, για τα οποία ισχύει $MA^2 - MB^2 = \lambda^2$, όπου A, B είναι δύο ορισμένα σημεία και λ ένα γνωστό ευθύγραμμο τμήμα.
16. ** Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2 . Να δείξετε ότι από κάθε μία διέρχεται ένα μόνο επίπεδο παράλληλο προς την άλλη.
17. ** Από κάθε σημείο του χώρου, που δεν ανήκει σε καμία από δύο ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2 διέρχεται ένα μόνο επίπεδο παράλληλο προς αυτές.
18. ** Από κάθε σημείο A, που δεν ανήκει στο επίπεδο q δύο τεμνομένων ευθειών ε_1 και ε_2 διέρχεται ένα μόνο επίπεδο παράλληλο προς τις ε_1 και ε_2 .

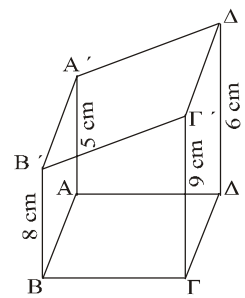
19. *** Δίνεται στρεβλό⁽¹⁾ τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα βαρύκεντρα⁽²⁾ Θ και Θ' των τριγώνων $A\Gamma\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η $\Theta\Theta'$ είναι παράλληλη προς:
- την AB .
 - το επίπεδο (A, B, Γ) .
 - το επίπεδο (A, B, Δ) .
- (1) *Στρεβλό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι το σχήμα του οποίου οι κορυφές A, B, Γ, Δ δεν ανήκουν όλες στο ίδιο επίπεδο.*
- (2) *Βαρύκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του.*
20. ** Δίνεται επίπεδο ρ , σημείο A εκτός αυτού και ευθεία ϵ_1 που τέμνει το ρ και δεν διέρχεται από το A . Να κατασκευάσετε⁽¹⁾ ευθεία ϵ_2 παράλληλη του ρ η οποία να διέρχεται από το A και να τέμνει την ϵ_1 .
- (1) *Όταν ζητάμε «κατασκευή σχήματος στο χώρο», εννοούμε το θεωρητικό καθορισμό του σχήματος, δηλαδή την εύρεση στοιχείων με τη βοήθεια αβαθμολόγητου κανόνα και διαβήτη, με τα οποία μπορεί το σχήμα να ορισθεί.*
21. ** Δίνεται στρεβλό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E, Z και H αντίστοιχα των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι:
- Οι ευθείες $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι παράλληλες προς το επίπεδο (E, Z, H) .
 - Το ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta$ τέμνεται από το επίπεδο (E, Z, H) στο μέσο του.
22. ** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τις κορυφές του φέρνουμε τα παράλληλα και ίσα ευθύγραμμα τμήματα AA', BB' και $\Gamma\Gamma'$ έξω από το επίπεδο του τριγώνου $AB\Gamma$ και προς το ίδιο μέρος του χώρου. Να δείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.
 - Τα επίπεδα των δύο τριγώνων είναι παράλληλα.

23. ** Στο διπλανό σχήμα είναι $p \parallel q \parallel r$ και $AB = 6,5 \text{ cm}$, $B\Gamma = 4 \text{ cm}$, $A\Gamma' = 10 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων:
- $A'B'$
 - $B'\Gamma'$.



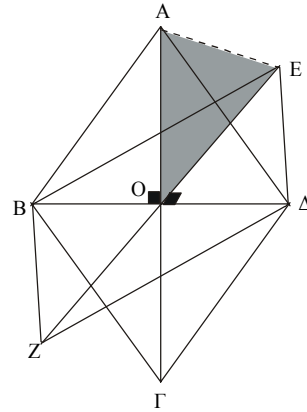
24. ** Θεωρούμε επίπεδο p και σημείο O έξω από αυτό. Αν A, B και Γ είναι τρία σημεία του επιπέδου P να δείξετε ότι τα μέσα M, N και K αντίστοιχα των ευθυγράμμων τμημάτων OA, OB και $O\Gamma$ ισαπέχουν από το επίπεδο p στις παρακάτω περιπτώσεις
- Όταν τα A, B και Γ δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.
 - Όταν τα A, B και Γ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

25. ** Αν $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και $AA' = 5 \text{ cm}$, $BB' = 8 \text{ cm}$, $\Gamma\Gamma' = 9 \text{ cm}$, $\Delta\Delta' = 6 \text{ cm}$ και $AA' \parallel BB' \parallel \Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$, να δείξετε ότι:
- $(AA', \Delta\Delta') \parallel (BB', \Gamma\Gamma')$.
 - $(AA', BB') \parallel (\Gamma\Gamma', \Delta\Delta')$.



26. ** Δίνονται δυο οξείες γωνίες $\hat{x} \hat{O} y$, $\hat{x}' \hat{O}' y'$ που περιέχονται σε διαφορετικά επίπεδα p και q αντίστοιχα και έχουν τις πλευρές τους παράλληλες. Να δείξετε ότι:
- α) $p // q$.
- β) $\hat{x} \hat{O} y = \hat{x}' \hat{O}' y'$.
27. ** Δίνονται δύο παράλληλα επίπεδα p και q . Από ένα σημείο K του χώρου φέρουμε τρεις ημιευθείες Kx , Ky , Kz οι οποίες τέμνουν τα επίπεδα p και q στα σημεία A , B , Γ και Δ , E , Z αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.
28. ** Να δείξετε ότι οι προβολές δύο παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 σε επίπεδο p
- α) είναι παράλληλες ευθείες.
- β) Σε ποιες περιπτώσεις δεν ισχύει το (α);
29. ** Δίνονται δύο παράλληλα επίπεδα p και q . Να δείξετε ότι κάθε ευθεία ε που τέμνει τα επίπεδα p και q σχηματίζει ίσες γωνίες με αυτά.
30. ** Να δείξετε ότι η προβολή ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ πάνω σ' ένα επίπεδο p είναι παραλληλόγραμμο.
31. ** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB πλάγιο προς το επίπεδο p . Να δείξετε ότι η προβολή του μέσου M του AB στο επίπεδο p είναι το μέσο της προβολής $A'B'$ του AB στο p .
32. ** Τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος AB απέχουν από επίπεδο p , 26 cm και 38 cm αντίστοιχα. Αν η προβολή του AB πάνω στο επίπεδο p είναι $A'B' = 16$ cm, να βρεθεί το μήκος του τμήματος AB .

33. ** Δίνονται δύο ρόμβοι $AB\Gamma\Delta$ και $EBZ\Delta$ με κοινή διαγώνιο τη $B\Delta$ οι οποίοι βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα. Να δείξετε ότι το επίπεδο που ορίζουν οι ευθείες $A\Gamma$ και EZ είναι κάθετο στα επίπεδα των δύο ρόμβων.



34. ** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο A και είναι ορθογώνιες προς μία ευθεία ϵ .
35. ** Αν δύο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 είναι ορθογώνιες, τότε καθεμιά περιέχεται σε επίπεδο κάθετο προς την άλλη και αντιστρόφως.
36. ** Αν μία ευθεία ϵ είναι κάθετη σε επίπεδο p και παράλληλη προς άλλο επίπεδο q τότε είναι $p \perp q$.