Ερωτήσεις ανάπτυξης και σύντομης απάντησης

1. α) $AB^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \text{ cm}^2$

$AB = 4$ cm

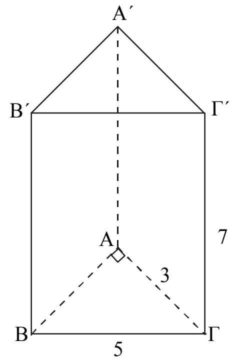
Περ. βάσης = 3 + 4 + 5 = 12 cm

$E_\pi = 12 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 84 \text{ cm}^2$

β) $E_\beta = \dfrac{3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}^2$

$E_{o\lambda} = 2E_\beta + E_\pi = 96 \text{ cm}^2$

γ) $V = 6 \cdot 7 = 42 \text{ cm}^3$



2. α) $BO = 4$ cm

$AO = 3$ cm

Άρα από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ προκύπτει ότι

$AB = 5$ cm

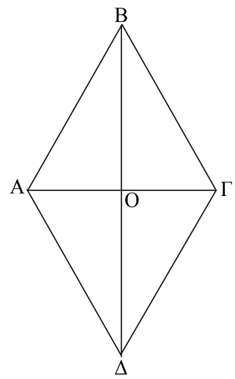
β) Περ. βάσης = 4 · 5 = 20 cm

$E_\pi = 20 \cdot 7 = 140 \text{ cm}^2$

γ) $E_\beta = \dfrac{8 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}}{2} = 24 \text{ cm}^2$

$E_{o\lambda} = 2E_\beta + E_\pi = 188 \text{ cm}^2$

δ) $V = 24 \text{ cm}^2 \cdot 7 \text{ cm} = 168 \text{ cm}^3$



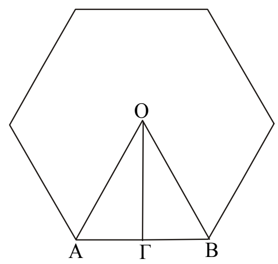
3. α) Έστω x η πλευρά της βάσης. Τότε το εμβαδό της θα είναι x^2. Η παράπλευρη ακμή είναι 2x. Η περίμετρος της βάσης είναι 4x. Το ύψος του πρίσματος είναι 2x. Άρα $E_\pi = 4x \cdot 2x = 8x^2$ ή $8x^2 = 2\alpha^2$ ή $x = \dfrac{\alpha}{2}$

β) $V = E_\beta \cdot \upsilon = \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot 2 \cdot \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\alpha^3}{4}$

4. α) Έστω $AB = \alpha$

$O\Gamma = 2\sqrt{3}$ cm αλλά και $O\Gamma = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Άρα $2\sqrt{3} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ ή $\alpha = 4$ cm



β) $E_\beta = 6 \cdot \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ ή $E_\beta = \dfrac{6 \cdot 16\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$ cm^2

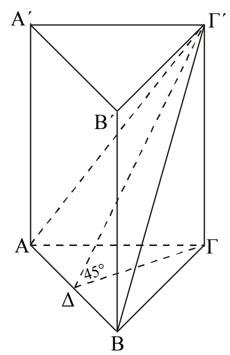
γ) Είναι ύψος πρίσματος $\upsilon = 3 \cdot \alpha = 12$ cm, $E_\pi = 6 \cdot \alpha \cdot \upsilon = 6 \cdot 4 \cdot 12 = 288$ cm^2

$E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta = 48\,(6 + \sqrt{3})$ cm^2

5. α) Το Δ είναι το μέσο της ΑΒ. Οπότε $\Gamma'\hat{\Delta}\Gamma = 45°$ και

$\Gamma\Delta,\ \Gamma'\Delta \perp AB$. Άρα $\Gamma\Gamma' = \Gamma\Delta = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επομένως

$V = E_\beta \cdot \upsilon = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\alpha^3}{8}$.



β) Εξάλλου $\Gamma'\Delta = \Gamma\Delta\sqrt{2} = \dfrac{\alpha\sqrt{6}}{2}$ οπότε

$(\Gamma'AB) = \dfrac{1}{2} AB \cdot \Gamma'\Delta = \dfrac{\alpha^2\sqrt{6}}{4}$

6. α) Έστω α, β, γ οι διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου.

Είναι
$$\left.\begin{aligned} &\alpha = 2\beta \\ &\delta = 3\gamma \\ &\alpha\beta\gamma = 3200 \\ &\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Από τη λύση του συστήματος (1) προκύπτει

$\gamma = 10$ cm, $\beta = 12{,}6$ cm, $\alpha = 25{,}2$ cm

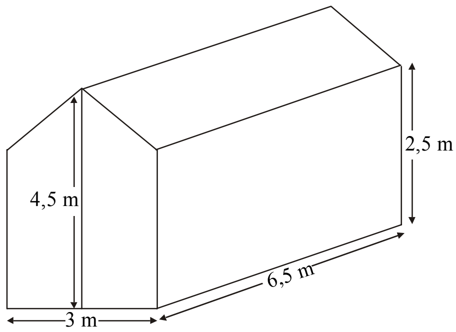
β) $E = 2\,(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2\,(25{,}2 \cdot 12{,}6 + 12{,}6 \cdot 10 + 10 \cdot 25{,}2) =$

$2\,(317{,}52 + 126 + 252) = 2 \cdot 695{,}52 = 1391$ cm^2

7. Το εμβαδό της πρόσοψης αποτελείται από ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 3 m και 2,5 m και ένα τρίγωνο με βάση 3 m και ύψος 4,5 - 2,5 = 2 m και είναι

$E = 3 \cdot 2{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 =$

$7{,}5 + 3 = 10{,}5\ m^2$.



Επομένως ο όγκος V της σκηνής είναι $V = E_\beta \cdot \upsilon = 10{,}5 \cdot 6{,}5 = 68{,}25\ m^3$.

8. Έστω α το πλάτος του δοχείου, β το μήκος του και γ το βάθος του. Τότε το μήκος του θα είναι 2α και το βάθος του θα είναι $\frac{4\alpha}{3}$. Ο όγκος του δοχείου είναι $2\alpha \cdot \alpha \frac{4\alpha}{3} = \frac{8\alpha^3}{3}$. Άρα $\frac{8\alpha^3}{3} = 72$ ή $8\alpha^3 = 216$ ή $\alpha^3 = 27$ ή $\alpha = 3$ m. Επομένως β = 6 m και γ = 4 m.

9. α) Έστω α η πλευρά της βάσης. Τότε εμβ. βάσης = $\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}$. Η πέτρα έχει ακμή $0{,}5\sqrt{3}$ m και ο όγκος της είναι $V_{\pi\acute{\varepsilon}\tau\rho\alpha\varsigma} = (0{,}5)^3\ (\sqrt{3}\,)^3 m^3$. Ο όγκος αυτός της πέτρας είναι ίσος με τον όγκο του νερού της δεξαμενής η οποία έχει εμβαδό βάσης $\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}$ και ύψος 0,01 m.

Δηλαδή $\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}01 = (0{,}5)^3\ (\sqrt{3}\,)^3$ ή $\alpha^2 = 25$ ή α = 5 m.

β) Ο όγκος του νερού που περιέχει η δεξαμενή είναι $\frac{3 \cdot 25\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 75\sqrt{3}\ m^3$

10. Είναι $\alpha + \beta + \gamma = 13$, $2\,(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 108$, $\alpha^2 + \beta^2 = 25$
Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι α = 3 cm, β = 4 cm, γ = 6 cm

11. Είναι $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{5} = \lambda$, $2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha = 21.150$ ή

$\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $\gamma = 5\lambda$

$2 \cdot 3\lambda \cdot 4\lambda + 2 \cdot 4\lambda \cdot 5\lambda + 2 \cdot 5\lambda \cdot 3\lambda = 21.150$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $\lambda = \pm 15$. Η $\lambda = -15$ απορρίπτεται.

Για $\lambda = 15$ έχουμε $\alpha = 45$ cm, $\beta = 60$ cm, $\gamma = 75$ cm.

β) $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ή $V = 45 \cdot 60 \cdot 75 = 202.500$ cm^3.

12. Εφόσον οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου έχουμε: $\alpha = x - \omega$ $\beta = x$ $\gamma = x + \omega$

Επειδή $\alpha + \beta + \gamma = 27$ cm τότε $x - \omega + x + x + \omega = 27$ ή $3x = 27$ ή $x = 9$

Άρα $\alpha = 9 - \omega$, $\beta = 9$, $\gamma = 9 + \omega$

Η επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ισούται προς 454 cm^2 και είναι $E = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 2[9(9 - \omega) + (9 - \omega)(9 + \omega) + 9(9 + \omega)] = 454$ ή

$9^2 - 9\omega + 9^2 - \omega^2 + 9^2 + 9\omega = 227$ ή $\omega^2 = 16$ ή $\omega = \pm 4$ cm

i) Για $\omega = 4$ έχουμε $\alpha = 5$ cm, $\beta = 9$ cm, $\gamma = 13$ cm

ii) Για $\omega = -4$ έχουμε $\alpha = 13$ cm, $\beta = 9$ cm, $\gamma = 5$ cm

Και στις δύο περιπτώσεις ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι

$V = \alpha\beta\gamma = 5 \cdot 9 \cdot 13 = 585$ cm^3

13. α) Η βάση του είναι ισόπλευρο τρίγωνο

$A\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ ή $2{,}5\sqrt{3} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ ή $\alpha = 5$ cm,

$AB = 5$ cm

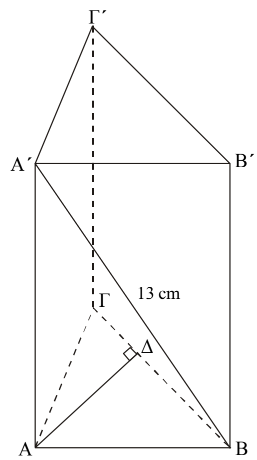
Από το ορθογώνιο τρίγωνο Α΄ΑΒ έχουμε

$AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144}$ οπότε

$\upsilon = 12$ cm

β) $E_\pi = 3\alpha \cdot \upsilon = 3 \cdot 5 \cdot 12 = 180$ cm^2

γ) $E_{o\lambda} = E_\pi + 2E_\beta = 180 + 2\,\frac{5^2\sqrt{3}}{4} = 201{,}4$ cm^2



14. Θα βάψουμε τις 5 έδρες τις οποίες έχουν εμβαδό Ε = $5α^2$. Είναι $δ = α\sqrt{3}$ ή $δ^2 = 3α^2$ ή $10^2 = 3α^2$ ή $α^2 = \frac{100}{3} = 33{,}33$ m^2

Ε = 5 · 33,33 = 166,65 m^2. Θα στοιχίσει 166,65 · 150 = 24.998 δρχ.

15. $Ε_{ολ} = \frac{108.000}{500} = 216$ m^2

α) $Ε_{ολ} = 6α^2$ ή $216 = 6α^2$ ή $α^2 = 36$ ή α = 6 m

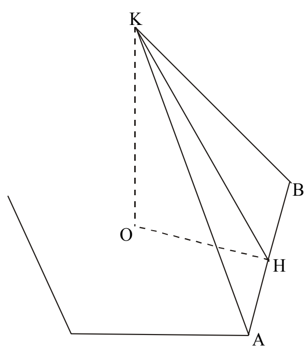
β) $V = α^3 = 6^3$ $m^3 = 216$ m^3

16. α) Φέρουμε το ύψος ΚΟ και ΟΗ ⊥ ΑΒ τότε ΚΗ ⊥ ΑΒ. Το απόστημα ΟΗ κανονικού εξαγώνου πλευράς 5α ισούται με $ΟΗ = \frac{5α\sqrt{3}}{2}$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΗ έχουμε:

$ΚΗ^2 = ΚΟ^2 + ΟΗ^2 = (6α)^2 + (\frac{5α\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{219α^2}{4}$ ή

$ΚΗ = \frac{α\sqrt{219}}{2}$

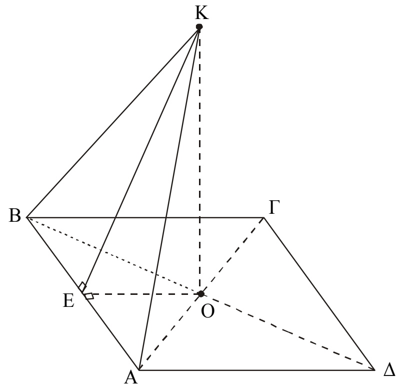


Το εμβαδό της βάσης είναι $Β = \frac{3(5α)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{75α^2\sqrt{3}}{2}$

β) $Ε_π = \frac{5α \cdot 6}{2} \cdot \frac{α\sqrt{219}}{2} = \frac{15α^2\sqrt{219}}{2}$

γ) $Ε_{ολ} = \frac{75α^2\sqrt{3}}{2} + \frac{15α^2\sqrt{219}}{2} = \frac{15α^2}{2}(5\sqrt{3} + \sqrt{219})$

17. α) Έστω ΑΒ = α η ακμή της βάσης της τότε $KE = \frac{5\alpha}{6}$ όπου ΚΕ το παράπλευρο ύψος.



$E_{ολ} = E_{π} + B = \frac{4\alpha}{2}\cdot\frac{5\alpha}{6} + \alpha^2 = \frac{8\alpha^2}{3}$

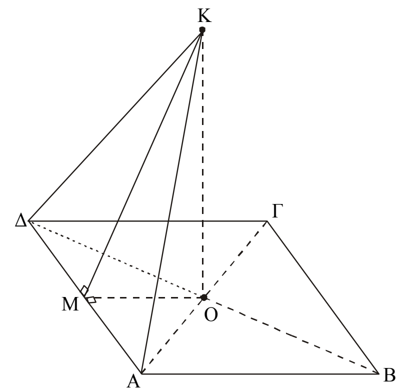
$384 = \frac{8\alpha^2}{3}$, $\alpha^2 = 144$,

$\alpha = 12$ cm

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΕ με $OE = \frac{\alpha}{2} = 6$ cm και $KE = \frac{5\alpha}{6} = 10$ cm

έχουμε $KO^2 = KE^2 - OE^2 = 10^2 - 6^2 = 64$ ή $KO = 8$ cm

18. Έχουμε $\upsilon = \frac{\alpha}{\sqrt{12}} = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΔ, τότε $OM = \frac{\alpha}{2}$



και $KM^2 = \frac{\alpha^2}{12} + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{3}$ οπότε

$KM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} = 2KO$. Άρα $\frac{KO}{OM} = \frac{1}{2}$.

Αλλά ημ $K\hat{M}O = \frac{KO}{OM} = \frac{1}{2}$. Άρα $K\hat{M}O = 30°$. Όμως $OM \perp A\Delta$ και $KM \perp A\Delta$ οπότε η $K\hat{M}O$ είναι η αντίστοιχη επίπεδη.

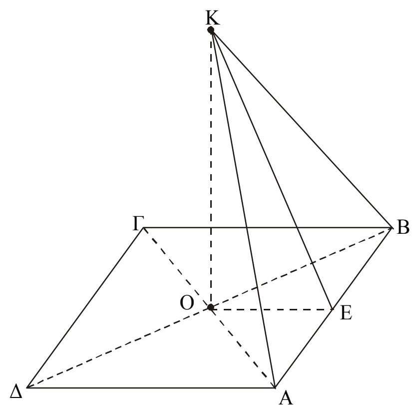
19. α) $E_\pi = \dfrac{\Pi \cdot h}{2}$

Περ. βάσης = 4 · 0,4 = 1,6 m το παράπλευρο ύψος ΚΕ είναι

$KE^2 = KA^2 - EA^2 = 0{,}7^2 - 0{,}2^2$ ή

$KE^2 = 0{,}49 - 0{,}04 = 0{,}45$ ή

$KE = 0{,}67$ m



$$E_\pi = \frac{1{,}6\text{ m} \cdot 0{,}67\text{ m}}{2} = \frac{1{,}072\text{ m}^2}{2} = 0{,}536\text{ m}^2$$

β) $E_{ολ} = E_\beta + E_\pi = 0{,}16 + 0{,}536 = 0{,}696\text{ m}^2$

20. α) $E_\pi = \dfrac{\Pi \cdot h}{2}$

$OM = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm

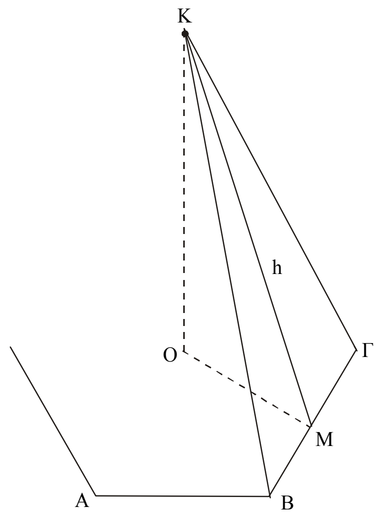
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΜ έχουμε:

$h^2 = KO^2 + OM^2 = 50^2 + 48 =$

$= 2500 + 48 = 2548\text{ cm}^2$

$h = 50{,}47$ cm

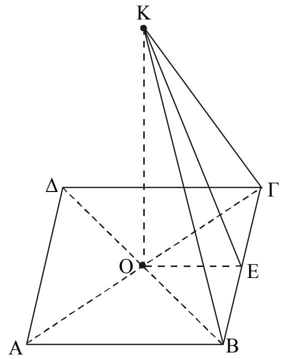
$E_\pi = \dfrac{8 \cdot 6 \cdot 50{,}47}{2} = 1211{,}28\text{ cm}^2$



β) $E_{ολ} = E_\beta + E_\pi = \dfrac{3 \cdot 8^2\sqrt{3}}{2} + 1211{,}28 = 166{,}27 + 1211{,}28 = 1377{,}55\text{ cm}^2$

γ) $V = \dfrac{166{,}27 \cdot 50}{3} = 2771{,}2\text{ cm}^3$

21. α) $OB = \frac{0{,}8}{\sqrt{2}}$



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΒ έχουμε:

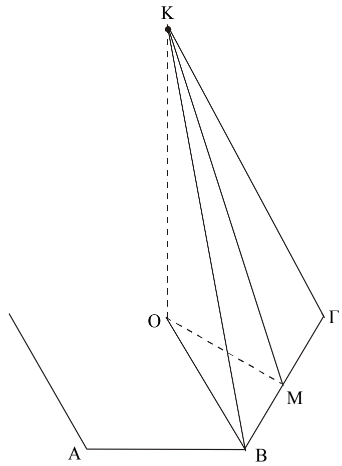
$KO^2 = KB^2 - OB^2 = 1{,}5^2 - \frac{0{,}8^2}{2} =$

$= 2{,}25 - \frac{0{,}64}{2} = 2{,}25 - 0{,}32 = 1{,}93 \text{ m}^2,$

$KO = 1{,}38 \text{ m}$

β) $V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3} = \frac{0{,}8^2 \cdot 1{,}38}{3} = \frac{0{,}64 \cdot 1{,}38}{3} = \frac{0{,}8832}{3} = 0{,}294 \text{ m}^3$

22. α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΒ έχουμε:



$KB^2 = KO^2 + OB^2 = 10^2 + 2^2 =$

$= 100 + 4 = 104 \text{ m}^2,$

$KB = 10{,}19 \text{ m}$

β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΜΒ έχουμε:

$KM^2 = KB^2 - MB^2 = 104 - 1^2 = 103 \text{ m}^2$

$KM = 10{,}148 \text{ m}$

$E_\pi = \frac{\Pi \cdot h}{2}$ ή $E_\pi = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10{,}148}{2} = 60{,}88 \text{ m}^2$

γ) Είναι $E_\beta = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}$ και $V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3}$

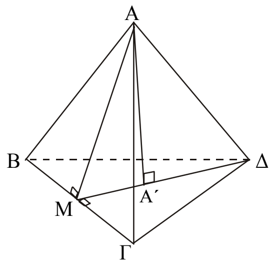
Άρα $V = \frac{3 \cdot 2^2\sqrt{3} \cdot 10}{2 \cdot 3} = 34{,}64 \text{ m}^3$

23. $V = \frac{\text{Εμβ. βάσης} \cdot \text{ύψος}}{3}$

Εμβ. βάσης $= \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$80 = \frac{9\sqrt{3} \cdot \upsilon}{3}$ ή $240 = 9\sqrt{3} \cdot \upsilon$ ή $\upsilon = \frac{240}{9\sqrt{3}}$ ή $\upsilon = \frac{240\sqrt{3}}{27} = \frac{80\sqrt{3}}{9} = 15{,}4 \text{ cm}$

24. Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, τότε ΑΜ, ΜΔ $\perp$ ΒΓ, οπότε $\text{Α}\hat{\text{Μ}}\text{Δ} = 60°$. Αν ΑΑ΄ $\perp$ ΜΔ, τότε ΑΑ΄ $\perp$ (Β, Γ, Δ)



Αλλά $\text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Α}΄ = 30°$, οπότε $\text{ΜΑ}΄ = \dfrac{\text{ΑΜ}}{2}$ και

$$\text{ΑΑ}΄ = \sqrt{\text{ΑΜ}^2 - \frac{\text{ΑΜ}^2}{4}} = \frac{\text{ΑΜ}\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\alpha}{4}$$

Συντομότερα $\text{ΑΑ}΄ = \text{ΑΜ}\cdot\text{ημ}60° = \text{ΑΜ}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\alpha}{4}$.

25. Η επιφάνεια κανονικού τετραέδρου αποτελείται από 4 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 4 cm και καθένα τους έχει εμβαδό $\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4}$.

Άρα $E_{ολ} = 4\cdot\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\ \text{cm}^2 = 27{,}71\ \text{cm}^2$

26. α) $E_\pi = \dfrac{(\Pi + \Pi΄)\cdot h}{2}$ ή $E_\pi = \dfrac{(4\cdot 80 + 4\cdot 60)\cdot 100}{2} = 28.000\ \text{cm}^2$

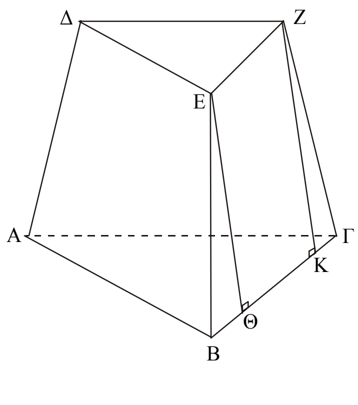
β) $E_{ολ} = E_\pi + E_B + E_\beta = 28.000 + 6.400 + 3.600 = 38.000\ \text{cm}^2$

27. α) $E_\pi = \dfrac{(\Pi + \Pi΄)\cdot \text{ΕΘ}}{2}$

$\Pi = 1{,}2\cdot 3 = 3{,}6$ m

$\Pi΄ = 0{,}95\cdot 3 = 2{,}85$ m

Υπολογίζουμε την ΕΘ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΘΒ.



Πράγματι αν φέρουμε τις ΕΘ και ΖΚ κάθετες πάνω στη ΒΓ θα είναι

ΕΖ = ΘΚ = 0,95 m και ΒΘ = ΚΓ.

Άρα θα είναι 2ΒΘ = ΒΓ - ΘΚ = 1,2 - 0,95 = 0,25, δηλαδή ΒΘ = 0,125 m.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΘΒ έχουμε:

$ΕΘ^2 = ΕΒ^2 - ΒΘ^2 = 1{,}5^2 - 0{,}125^2 = 2{,}25 - 0{,}015625 = 2{,}234\ m^2$

ΕΘ =1,49 m

$$Ε_π = \frac{(3{,}6 + 2{,}85)\cdot 1{,}49}{2} = \frac{6{,}45\cdot 1{,}49}{2} = \frac{9{,}6105}{2} = 4{,}8\ m^2$$

β) $$Ε_{ολ} = \frac{1{,}2^2\sqrt{3}}{4} + \frac{0{,}95^2\sqrt{3}}{4} + 4{,}8 = 0{,}62 + 0{,}39 + 4{,}8 = 5{,}81\ m^2$$