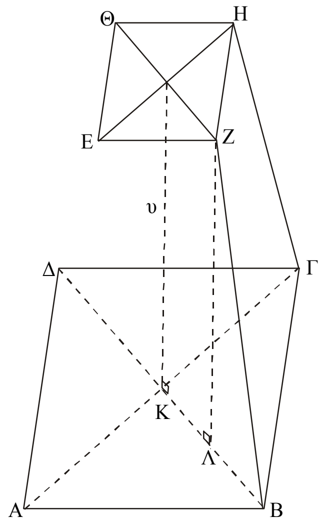
28. α) $V = \frac{1}{3} υ (B + β + \sqrt{Bβ})$



$B = 70^2 = 4.900 \text{ cm}^2$

$β = 60^2 = 3.600 \text{ cm}^2$

$\sqrt{Bβ} = \sqrt{70^2 \cdot 60^2} = 70 \cdot 60 = 4.200 \text{ cm}^2$

<u>Υπολογισμός του υ</u>

Από το Ζ φέρουμε κάθετη ΖΛ πάνω στη βάση ΑΒΓΔ η οποία τέμνει την ΚΒ στο σημείο Λ. Θα είναι ΛΒ = ΚΒ - ΚΛ ή

$ΛΒ = \frac{70\sqrt{2}}{2} - \frac{60\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΛΒ έχουμε:

$ΖΛ^2 = ΖΒ^2 - ΛΒ^2 = 4225 - (5\sqrt{2})^2 = 4225 - 50 = 4175 \text{ cm}^2$

Άρα ΖΛ = υ = 64,61 cm

$V = \frac{1}{3}\ 64{,}61\ (4900 + 3600 + 4200) = \frac{1}{3} \cdot 64{,}61 \cdot 12.700 = 273.515{,}6 \text{ cm}^3$

29. Η διαφορά Δ του όγκου είναι

$$\Delta = \frac{1}{2}(B+\beta)\upsilon - \frac{1}{3}(B+\sqrt{B\beta}+\beta)\upsilon = \frac{\upsilon}{6}[3(B+\beta) - 2(B+\sqrt{B\beta}+\beta)] =$$

$$\frac{\upsilon}{6}(B - 2\sqrt{B\beta}+\beta) = \frac{\upsilon}{6}(\sqrt{B}-\sqrt{\beta})^2 > 0. \text{ Άρα } \Delta > 0.$$

Ο εργολάβος αδίκησε τον ιδιοκτήτη κατά

$$\frac{\upsilon}{6}(\sqrt{B}-\sqrt{\beta})^2 = \frac{2}{6}(\sqrt{3{,}2^2}-\sqrt{0{,}2^2})^2 = \frac{2}{6}(3{,}2-0{,}2)^2 = \frac{2}{6}\cdot 3^2 = 3 \text{ m}^3.$$

Ο εργολάβος χρέωνε παραπάνω 3 m^3 μπετόν σε κάθε πέλμα.

30. α) $V = \frac{1}{3}E_\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{3}\, 233^2 \cdot 146 \cong 2.642.065 \text{ m}^3$

β) Η πέτρα που χρειάστηκε είναι 1000 - 1 = 999 χιλιοστά του όγκου της πυραμίδας, δηλαδή $0{,}999 \cdot 2.642.065 \cong 2.639.423 \text{ m}^3$

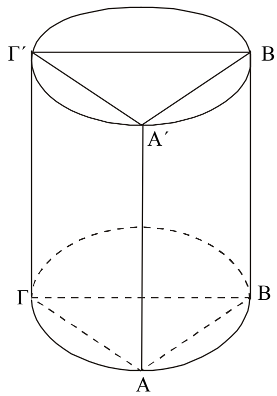
γ) Είναι $2 \cdot 2.639.423 = 5.278.846$ t περίπου

31. Αν R είναι η ακτίνα της βάσης και υ το ύψος του κυλίνδρου, τότε η παράπλευρη επιφάνεια του πρίσματος έχει εμβαδό

$E_\pi = 3 \cdot AB \cdot \upsilon = 3\lambda_3 \cdot \upsilon = 3R\sqrt{3}\,\upsilon$.

Άρα $\sqrt{3} = 3R\sqrt{3}\,\upsilon$, δηλαδή $R\upsilon = \frac{1}{3}$.

Το εμβαδό E'_π της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου θα είναι $E'_\pi = 2\pi R\upsilon = \frac{2\pi}{3}$.



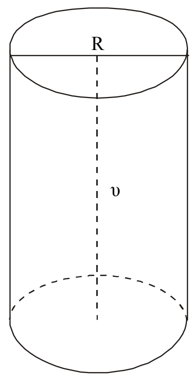
32. Έχουμε $\frac{1}{R} + \frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{2}$ ή $\frac{\upsilon + R}{\upsilon R} = \frac{1}{2}$ ή $\upsilon R = 2(\upsilon + R)$

$V = \pi R^2\upsilon$, ο όγκος του κυλίνδρου.

$E = 2\pi R(\upsilon + R)$, η ολική επιφάνεια του κυλίνδρου.

Άρα $\frac{V}{E} = \frac{\pi R^2 \upsilon}{2\pi R(\upsilon+R)} = \frac{2\pi R(\upsilon+R)}{2\pi R(\upsilon+R)} = 1$

33. α) $E_{ολ} = E_π + 2E_β$



$E_π = 2πRυ$

$R = \dfrac{δ}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ cm

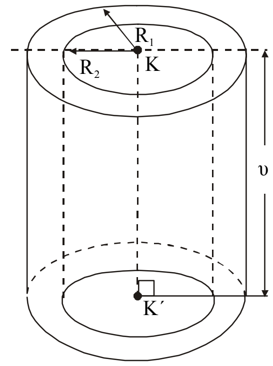
$E_π = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 20 = 628$ cm^2

$E_β = πR^2 = 3{,}14 \cdot 5^2 = 78{,}5$ cm^2

$E_{ολ} = 628 + 2 \cdot 78{,}5 = 628 + 157 = 785$ cm^2

β) $V = πR^2 \cdot υ = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 20 = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 20 = 1570$ cm^3

34. α) Ο αρχικός κύλινδρος έχει $R_1 = 2$ cm και $υ_1 = 5$ cm και αυτός που αφαιρούμε $R_2 = 1{,}5$ cm και $υ_2 = 5$ cm.



Το στερεό που απέμεινε έχει όγκο

$V = V_1 - V_2 = πR_1^2υ - πR_2^2υ$ ή

$V = π\,(R_1^2 - R_2^2)\,υ$ ή

$V = π\,(2^2 - 1{,}5^2) \cdot 5 = 8{,}75π \cong 27{,}475$ cm^3

και επομένως το βάρος του είναι

$B = 27{,}475 \cdot 7{,}4 = 203{,}3$ gr

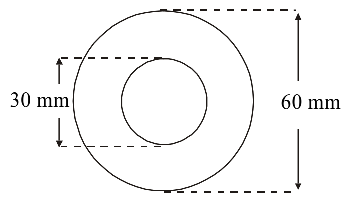
β) $E = E_{π_1} + E_{π_2} + 2\,(E_{β_1} - E_{β_2})$ ή

$E = 2π\,(R_1 + R_2)\,υ + 2π\,(R_1^2 - R_2^2) = 2π\,(R_1 + R_2)\,(υ + R_1 - R_2)$ ή

$E = 2π\,(2 + 1{,}5)\,(5 + 2 - 1{,}5) = 38{,}5\,π$ cm^2 ή $E = 120{,}89$ cm^2

35. α) Θα βρούμε πρώτα τον όγκο V_1, V_2 των κυλίνδρων.

Από τον όγκο



$V_1 = π\,(\dfrac{60}{2})^2 \cdot 28 = 25.200π$ mm^3 $= 25{,}2π$ cm^3

του εξωτερικού κυλίνδρου θα αφαιρέσουμε τον όγκο $V_2 = π\,(\dfrac{30}{2})^2 \cdot 28 = 6{,}3π$ cm^3 του εσωτερικού.

Είναι $V = 25{,}2π - 6{,}3π = 18{,}9π \cong 59{,}346$ cm^3

Άρα το βάρος Β του εξαρτήματος είναι $B = 7{,}86 \cdot 59{,}346 \cong 466{,}46$ gr

β) Η επιφάνεια του εξαρτήματος αποτελείται από τις κυρτές επιφάνειες των δύο κυλίνδρων και από τις επιφάνειες των βάσεών του που είναι σαν της διατομής. Άρα

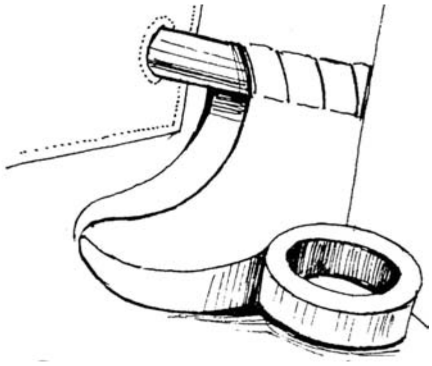
$$E_{ολ} = 2\pi \frac{60}{2} \cdot 28 + 2\pi \frac{30}{2} \cdot 28 + 2\pi \left(\frac{60}{2}\right)^2 - 2\pi \left(\frac{30}{2}\right)^2 =$$

$$1680\pi + 840\pi + 1800\pi - 450\pi = 3870\pi \text{ mm}^2 = 38{,}7\pi \text{ cm}^2 \cong 121{,}518 \text{ cm}^2$$

36. Το μήκος του σωλήνα είναι $25 \cdot 100 = 2500$ cm και η ακτίνα του $\frac{12}{2} = 6$ cm. Οπότε

$E_1 = 2\pi\rho\upsilon = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot 2500 = 94.200 \text{ cm}^2$

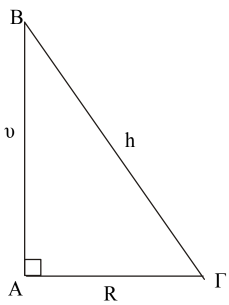
Επομένως τα $(100 - 5)\% = 95\%$ της ταινίας είναι 94200 cm^2 και αν $x \text{ cm}^2$



είναι όλη η ταινία τότε $\frac{95}{100}x = 94200$

$0{,}95x = 94200$, $\quad x = \frac{94200}{0{,}95}$, $\quad x = 99.158 \text{ cm}^2$, $\quad x = 9{,}9158 \cong 10 \text{ m}^2$

37. α) $E_{ολ} = \pi R\,(h + R)$ ή $9{,}42 = \pi \cdot 1\,(h + 1)$ ή τελικά $h = 2$ (περίπου)



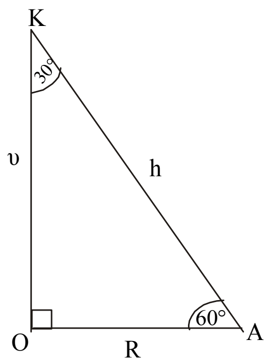
β) $\upsilon^2 = h^2 - R^2$ ή $\upsilon^2 = 3$ ή $\upsilon = \sqrt{3}$

γ) $E_\pi = \pi R h = 3{,}14 \cdot 1 \cdot 2 = 6{,}28 \text{ m}^2$ (περίπου)

δ) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3} 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = 1{,}81 \text{ m}^3$ (περίπου)

38. Το εμβαδό του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$. Άρα $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ ή $\alpha = 6$ m. Η ακτίνα του κύκλου του εγγεγραμμένου σε ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α είναι ίση με $R = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$ άρα $R = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$. Το εμβαδό της βάσης του κώνου είναι $E_\beta = \pi\,(\sqrt{3})^2 = 3\pi$ m^2. Το ύψος του κώνου είναι 6 m, άρα ο όγκος V του κώνου θα είναι $V = \frac{1}{3}\,3\pi \cdot 6 = 6\pi = 18{,}84$ m^3.

39. α) Αν R η ακτίνα της βάσης του κώνου, τότε η περίμετρος της βάσης είναι 2πR. Άρα 2πR = 6π ή R = 3 m



$OA = R = \frac{h}{2}$ ή $h = 2R = 6$ m

$\upsilon^2 = h^2 - R^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ m^2

$\upsilon = 5{,}19$ m

$E_\pi = \pi R h = 56{,}52$ m^2

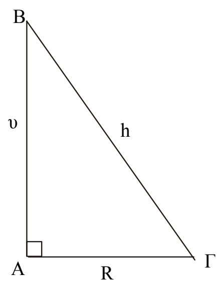
β) $V = \frac{1}{3}\pi R^2\upsilon = 48{,}88$ m^3

40. $E = \pi R\,(h + R)$ ή $8 = \pi R\,(2 + R)$ ή $\pi R^2 + 2\pi R - 8 = 0$ ή $3{,}14R^2 + 6{,}28\,R - 8 = 0$

ή R = 0,88 cm

$V = \frac{1}{3}\,\pi R^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14\,(0{,}88)^2 \cdot 2 = 1{,}621$ m^3.

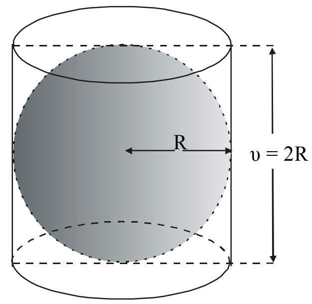
41. α) $E_\pi = \pi Rh$ ή $56{,}5 = 3{,}14\, R \cdot 18$ ή $R = \dfrac{56{,}5}{5{,}652} \cong 10$ dm



β) $\upsilon = \sqrt{h^2 - R^2} = \sqrt{18^2 - 10^2} = \sqrt{224} \cong 15$ dm

γ) $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \upsilon = \dfrac{1}{3}\, 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 15 = 1570$ dm^3

42. $V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi R^2 \upsilon$ και επειδή $\upsilon = 2R$ θα είναι



$V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi R^2\, 2R = 2\pi R^3$

$V_{\sigma\varphi} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Η ολική επιφάνεια του κυλίνδρου είναι

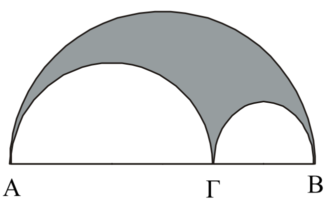
$E_{\kappa\upsilon\lambda} = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 =$
$4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$

$E_{\sigma\varphi} = 4\pi R^2$

Θα έχουμε λοιπόν: $\dfrac{V_{\kappa\upsilon\lambda}}{V_{\sigma\varphi}} = \dfrac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{2}{\frac{4}{3}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{E_{\kappa\upsilon\lambda}}{E_{\sigma\varphi}} = \dfrac{6\pi R^2}{4\pi R^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$. Επομένως $\dfrac{V_{\kappa\upsilon\lambda}}{V_{\sigma\varphi}} = \dfrac{E_{\kappa\upsilon\lambda}}{E_{\sigma\varphi}}$.

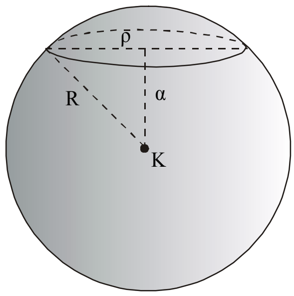
43. Αν V_1, V_2, V_3 οι όγκοι των σφαιρών που προκύπτουν με περιστροφή των ημικυκλίων διαμέτρων ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, τότε ο ζητούμενος όγκος είναι



$V = V_1 - V_2 - V_3 = \dfrac{1}{6}\pi AB^3 - \dfrac{1}{6}\pi A\Gamma^3 - \dfrac{1}{6}\pi B\Gamma^3 = \dfrac{1}{6}\pi\,[(3\alpha)^3 - (2\alpha)^3 - \alpha^3] =$

$\dfrac{1}{6}\,\pi 18\alpha^3 = 3\pi\alpha^3$

44. $V_{κων} = \frac{1}{3}πρ^2α$ με $V = 100π$ cm^3

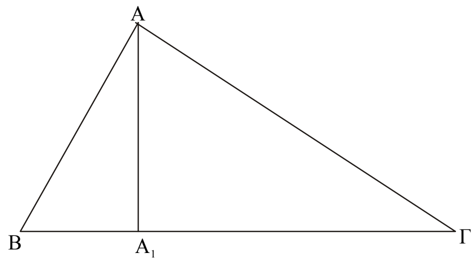


$α = υ = 12$ cm και ρ η ακτίνα της βάσης του κώνου, που είναι και ακτίνα της επίπεδης τομής της σφαίρας. Ο τύπος του όγκου δίνει $ρ^2 = \frac{3V}{απ}$

$R^2 = ρ^2 + α^2$. Άρα $R^2 = \frac{3V}{απ} + α^2$ ή

$R^2 = \frac{3 \cdot 100π}{12π} + 12^2 = 25 + 144 = 169$ cm^2 ή $R = 13$ cm

45. α) Αν $Α_1$ είναι η προβολή του Α πάνω στη ΒΓ, τότε



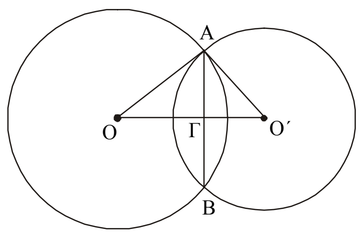
$V_{ΑΒΓ} = \frac{1}{3}πΑΑ_1^2 \cdot ΒΑ_1 +$

$+ \frac{1}{3}πΑΑ_1^2 \cdot ΓΑ_1 =$

$= \frac{1}{3}πΑΑ_1^2 \cdot (ΒΑ_1 + ΓΑ_1) = \frac{1}{3}πΑΑ_1^2 \cdot ΒΓ = \frac{1}{3}π \cdot 5^2 \cdot 9 = 75π$

β) $Ε_{ΑΒ} + Ε_{ΑΓ} = π \cdot ΑΑ_1 \cdot ΑΒ + π \cdot ΑΑ_1 \cdot ΑΓ = π \cdot υ_α\,(β + γ) = π \cdot 5 \cdot 11 = 55π$, αφού $β + γ = 20 - α = 11$

46. α) Είναι $R = 10$ cm και $ρ = 8$ cm. Τότε $R + ρ = 18$ cm. Επειδή $ΟΟ΄ = 12$ cm είναι $R + ρ > ΟΟ΄$ και $R - ρ < ΟΟ΄$. Άρα οι σφαίρες τέμνονται κατά κύκλο, του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο στην ΟΟ΄



στο σημείο Γ, το οποίο είναι και το κέντρο της τομής. Το εμβαδό αυτού του κύκλου είναι $πΑΓ^2$.

β) Θα υπολογίσουμε την ακτίνα ΑΓ. Γνωρίζουμε τις πλευρές του τριγώνου ΑΟΟ΄ επομένως το εμβαδό του είναι:

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{15 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = 15\sqrt{7}$ cm^2. Αλλά

$E = \dfrac{OO' \cdot A\Gamma}{2} = \dfrac{12A\Gamma}{2}$, ώστε $6A\Gamma = 15\sqrt{7}$ και $A\Gamma = \dfrac{15\sqrt{7}}{6} = \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$ cm.

Το εμβαδό του κύκλου τομής είναι $\pi A\Gamma^2 = \pi\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \dfrac{175\pi}{4}$ cm^2.

47. $\delta = \alpha\sqrt{3}$ ή $2R = \alpha\sqrt{3}$ ή $\alpha = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\delta^2}{\alpha^2} = \frac{(2R)^2}{\left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4R^2}{\dfrac{4R^2}{3}} = \frac{3}{1}$$

48. Η διάμετρος 2R της σφαίρας της εγγεγραμμένης στον κύβο είναι ίση με την ακμή του α, δηλαδή $2R = \alpha$ ή $R = \dfrac{\alpha}{2}$. Η επιφάνεια της εγγεγραμμένης σφαίρας είναι ίση με $4\pi\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = \pi\alpha^2$. Η διάμετρος της σφαίρας της περιγεγραμμένης περί τον κύβο ακμής α είναι ίση με τη διαγώνιο του κύβου, δηλαδή με $\alpha\sqrt{3}$ και επομένως το εμβαδό της περιγεγραμμένης σφαίρας είναι $4\pi\left(\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi\alpha^2$. Η διαφορά των επιφανειών είναι $3\pi\alpha^2 - \pi\alpha^2 = 2\pi\alpha^2$.

49. $E = 4\pi R^2$

$\Gamma = 2\pi R$ ή $\Gamma^2 = 4\pi^2 R^2 = E\cdot\pi$

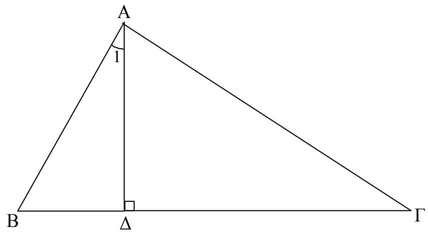
$\Gamma = \sqrt{E\cdot\pi}$ ή $\Gamma = \sqrt{7{,}85\pi} = 4{,}96$ m

50. $4\pi\cdot 2^2 = 16\,\pi$. Αν R είναι η ακτίνα της σφαίρας με διπλάσια επιφάνεια το εμβαδό της θα είναι $4\pi R^2$. Άρα $4\,\pi R^2 = 2\cdot 16\,\pi$ ή $R^2 = 8$ άρα $R = 2\sqrt{2} = 2{,}82$ m.

51. $E = 4\pi R^2$, $\Gamma = 2\pi R$,

$R = \dfrac{\Gamma}{2\pi}$, $E = 4\pi\dfrac{\Gamma^2}{4\pi^2} = \dfrac{\Gamma^2}{\pi}$

52. α) $V_{AB\Gamma} = V_{AB\Delta} + V_{A\Gamma\Delta} =$



$\frac{1}{3}\pi A\Delta^2 B\Delta + \frac{1}{3}\pi A\Delta^2 \Gamma\Delta =$

$\frac{1}{3}\pi A\Delta^2 (B\Delta + \Gamma\Delta) = \frac{1}{3}\pi A\Delta^2 B\Gamma.$

Επειδή $\hat{B} = 60°$ είναι $\hat{A} = 30°$ ή $B\Delta = \frac{AB}{2} = 2$ cm και

$A\Delta = \sqrt{AB^2 - B\Delta^2} = 2\sqrt{3}$ cm, οπότε $\Gamma\Delta = \sqrt{A\Gamma^2 - A\Delta^2} = 2\sqrt{6}$ cm.

Άρα $B\Gamma = 2 + 2\sqrt{6} = 2(\sqrt{6} + 1)$ cm, οπότε

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12 \cdot 2(\sqrt{6} + 1) = 8\pi(\sqrt{6} + 1)$ cm^3

β) $E_{AB} + E_{A\Gamma} = \pi \cdot A\Delta \cdot AB + \pi \cdot A\Delta \cdot A\Gamma = \pi \cdot A\Delta (AB + A\Gamma) = \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 10 =$
$20\pi\sqrt{3}$ cm^2