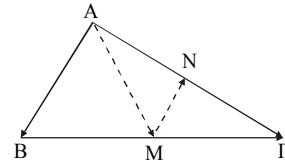


Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) $\vec{AB} + \vec{AG} = \vec{AD}$ όπου \vec{AD} η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές $AB, AG, \Gamma\Delta, \Delta B$ και $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AD}$.



β) $\vec{MN} = \vec{GN} - \vec{GM} = \frac{1}{2} (\vec{GA} - \vec{GB}) = \frac{1}{2} \vec{BA}$

2. $\vec{AA'} + \vec{BB'} = \vec{AM} + \vec{MM'} + \vec{M'A'} + \vec{BM} + \vec{MM'} + \vec{M'B'} = 2\vec{MM'}$

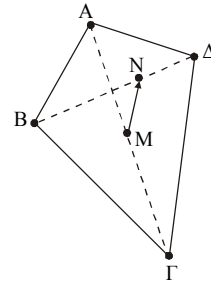
3. α) $\vec{\Delta A} + \vec{BA} = 2\vec{NA}$ (1)

$\vec{B\Gamma} + \vec{\Delta\Gamma} = 2\vec{N\Gamma}$ (2)

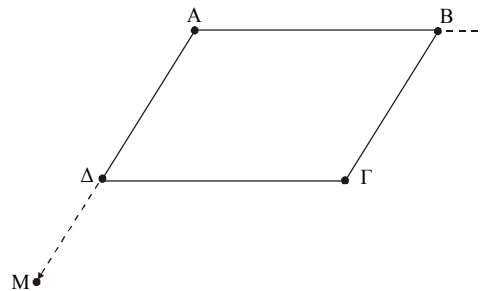
Ακόμη: $\vec{BA} + \vec{A\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Gamma B} = 0$ (3)

Από (1), (2) με πρόσθεση και λόγω της (3) προκύπτει η (α).

β) Πρόσθεση των (1), (2).



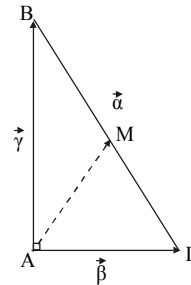
4. $\vec{M\Gamma} = \vec{M\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{\Delta A} + \vec{\Delta\Gamma}$
 $\vec{\Gamma N} = \vec{\Gamma B} + \vec{BN} = \vec{\Delta A} + \vec{\Delta\Gamma}$,
 άρα $\vec{M\Gamma} = \vec{\Gamma N}$.



5. Αν $\hat{A} = 1^\perp$ τότε $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0$

Ακόμη $\vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$, άρα $4\vec{AM} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$,

άρα $|\vec{AM}| = \frac{1}{2} |\vec{\alpha}|$.



6. Έστω $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{\Delta\Gamma} = \kappa\vec{\alpha}$.

Τότε $2\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = \vec{MA} + \vec{\alpha} + \vec{M\Delta} + \kappa\vec{\alpha} = (\kappa + 1)\vec{\alpha}$,

άρα $\vec{MN} = \frac{\kappa + 1}{2} \vec{\alpha}$, δηλαδή $\vec{MN} \parallel \vec{AB}$.

7. Αφού $\hat{A} = 1^\perp$ άρα $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$. Ακόμη $\vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB}$,

άρα $|\vec{B\Gamma}|^2 = |\vec{A\Gamma}|^2 + |\vec{AB}|^2$.

8. $\vec{AB} = \vec{A\Delta} + \vec{\Delta B}$ (1)

$\vec{AB} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma B}$ (2)

Πολλαπλασιασμός των (1), (2) και χρήση των ισοτήτων

$\vec{A\Delta} \cdot \vec{B\Gamma} = 0$ και $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$

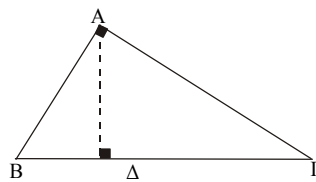
9. Ισχύει $\vec{AB} = \vec{A\Delta} + \vec{\Delta B}$ (1)

και $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$

$\vec{A\Gamma} = \vec{A\Delta} + \vec{\Delta\Gamma}$ (2)

και $\vec{A\Delta} \cdot \vec{\Delta B} = 0$, $\vec{A\Delta} \cdot \vec{\Delta\Gamma} = 0$

και πολλαπλασιάζουμε τις (1), (2) κατά μέλη.



10. α) Ισχύει $\vec{AB} + \vec{A\Gamma} = 2\vec{AM}$ (1)

Ακόμη $\vec{AB} - \vec{AG} = \vec{GB}$ (2)

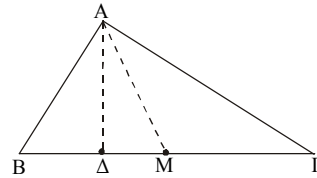
Υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη των (1), (2) και προσθέτουμε κατά μέλη.

β) Ισχύουν $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$ (1)

$\vec{AG} = \vec{AM} + \vec{MG}$ (2)

ενώ $\vec{AM} \cdot \vec{MB} = -\vec{AM} \cdot \vec{MG}$ (3)

και $\vec{AM} \cdot \vec{MG} = \vec{MG} \cdot \vec{MD} = \frac{\vec{BG}}{2} \cdot \vec{MD}$ (4)



Αν υψωθούν στο τετράγωνο οι (1), (2) και μετά αφαιρεθούν κατά μέλη, τότε βάσει των (3), (4) προκύπτει η ζητούμενη.

12. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AG}$ και $\vec{AM} = \frac{3}{4} \vec{AG}$

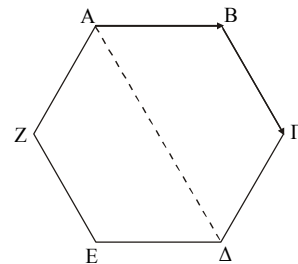
13. α) Ισχύει $\vec{AD} = 2\vec{BG} = 2\vec{\beta}$, άρα

$\vec{GD} = \vec{GB} + \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

και $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 0$

β) Ισχύει $\vec{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{AD} = 2\vec{\beta}$, $\vec{AE} = \vec{BD} =$

$\vec{BG} + \vec{GD} = \vec{\beta} + (\vec{\beta} - \vec{\alpha})$ και πρόσθεση όλων κατά μέλη.



14. $\vec{AD} + \vec{BG} = \vec{AG} + \vec{GD} + \vec{BD} + \vec{DG} = \vec{AG} + \vec{BD}$

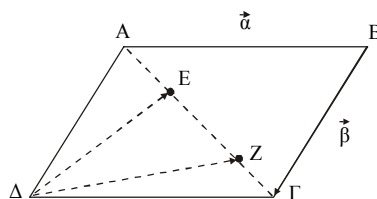
15. $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PD} + 2\vec{AB} = (\vec{PB} + \vec{BA}) + \vec{PB} + (\vec{PG} + \vec{GD}) + 2\vec{AB} = 2\vec{PB} + \vec{PG} + \vec{AB} + \vec{GD} = \vec{0}$ αφού $\vec{PG} = -2\vec{PB}$ και $\vec{AB} + \vec{GD} = \vec{0}$ λόγω παραλληλογράμμου.

16. $2\vec{KL} = \vec{KD} + \vec{KG} = \vec{KA} + \vec{AD} + \vec{KB} + \vec{BG} = \vec{AD} + \vec{BG}$

17. $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PG} = \vec{0}$, άρα $\vec{PB} + \vec{PG} = \vec{AP}$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε $2\vec{PM} = \vec{AP}$ (1)
Άρα το Ρ βρίσκεται πάνω στη διάμεσο ΑΜ και λόγω της (1) είναι το κέντρο βάρους.

18. α) $\vec{\Delta E} = \vec{AE} - \vec{A\Delta} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$

$$\vec{\Delta Z} = \vec{AZ} - \vec{A\Delta} = \frac{3}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$$



β) $\vec{ZB} = \vec{ΓB} - \vec{ΓZ} = -\vec{\beta} - [-\frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})] = \vec{\Delta E}$

19. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει: $2\vec{PA} + 3\vec{PB} - 2\vec{PG} - 3\vec{PI} = \vec{0}$ άρα $2(\vec{PA} - \vec{PG}) = 3(\vec{PI} - \vec{PB})$, δηλαδή $\vec{ΓA} \parallel \vec{BΓ}$.

21. $\vec{M_1M_2} = (-b, -a)$, $\vec{M_2M_3} = (2b, 2a)$, ;ara $\vec{M_1M_2} \parallel \vec{M_2M_3}$

22. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει: $\vec{OG} - \vec{OA} = \lambda(\vec{OB} - \vec{OA})$ άρα $\vec{AG} = \lambda \vec{AB}$, δηλαδή $\vec{AG} \parallel \vec{AB}$.

23. α) $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{ΓΓ_1} =$

$$\vec{AG} + \vec{GG_1} + \vec{G_1A_1} + \vec{BG} + \vec{GG_1} + \vec{G_1B_1} + \vec{ΓG} + \vec{GG_1} + \vec{G_1Γ_1} = \vec{0}$$

αφού $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{ΓG} = \vec{0}$ και $\vec{G_1A_1} + \vec{G_1B_1} + \vec{G_1Γ_1} = \vec{0}$

- β) Με βάση την (α), αν $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{ΓΓ_1} = \vec{0}$, τότε $\vec{GG_1} = \vec{0}$, δηλαδή συμπίπτουν τα G, G₁.

24. $\vec{\Sigma A} + \vec{\Sigma B} = 2\vec{\Sigma K}$, $\vec{\Sigma A} + \vec{\Sigma \Gamma} = 2\vec{\Sigma \Lambda}$, $\vec{\Sigma B} + \vec{\Sigma \Gamma} = 2\vec{\Sigma M}$
και πρόσθεση κατά μέλη.

25. α) $\vec{\Delta Z} = \vec{AZ} - \vec{A\Delta} = \frac{4}{5} \vec{A\Gamma} - \frac{2}{3} \vec{AB}$

$$\vec{\Delta E} = \vec{BE} - \vec{B\Delta} = 2(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) + \frac{1}{3} \vec{AB} = 2 \vec{A\Gamma} - \frac{5}{3} \vec{AB}$$

β) Ισχύει $\vec{\Delta E} = \frac{5}{2} \vec{\Delta Z}$, άρα $\vec{\Delta E} \parallel \vec{\Delta Z}$.

26. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $(\kappa + 2) \vec{PA} + 3\vec{PB} = (\kappa + 2) \vec{P\Gamma} + 3\vec{P\Gamma}$, άρα
 $(\kappa + 2) \vec{PA} = 3\vec{P\Gamma}$, άρα $\vec{PA} \parallel \vec{P\Gamma}$.

27. $3\vec{B\Lambda} = 3\vec{BA} + 3\vec{A\Lambda}$, $2\vec{MB} = 2\vec{MA} + 2\vec{AB}$ και $\vec{BK} = \vec{BA} + \vec{AK}$, οπότε
η δοσμένη γίνεται:

$$5\vec{A\Lambda} + 3\vec{MA} - 2\vec{AK} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad 3\vec{A\Lambda} + 2\vec{A\Lambda} + 3\vec{MA} - 2\vec{AK} = \vec{0},$$

άρα $3\vec{M\Lambda} = 2\vec{AK}$, άρα $\vec{K\Lambda}$, $\vec{M\Lambda}$ αντίρροπα.

28. Έστω A (x_1, y_1) και B (x_2, y_2) , τότε το μέσο M του AB έχει τετμημένη

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 7, \text{ άρα } x_1 + x_2 = 14, \text{ όμως } x_1, x_2 \text{ οι ρίζες της εξίσωσης, άρα}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 20 = 14, \text{ δηλαδή } \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = 2.$$

$$30. \quad \overrightarrow{AB} = (-4, 2) \quad \overrightarrow{B\Gamma} = (-1, -2) \quad \overrightarrow{A\Gamma} = (-3, 4)$$

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο B.

31. Έστω M (x, 0) το ζητούμενο σημείο. Τότε:

$$\alpha) \quad |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|, \quad \text{άρα } (x-3)^2 + 4 = (x-7)^2 + 16$$

$$\beta) \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

35. Αν (x, y) το ζητούμενο σημείο, τότε ισχύει: $\frac{3+1+x}{3} = 3$ και $\frac{0+2+y}{3} = 2$.

$$37. \quad \alpha) 2\sqrt{3} \quad \beta) 12 \quad \gamma) 12 + 4\sqrt{3}$$

$$\delta) \sqrt{12+4\sqrt{3}} \quad \epsilon) 8\vec{\alpha}^2 - 15\vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

$$38. \quad |\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$$

40. Αν ω η ζητούμενη γωνία τότε:

$$\text{συν}\omega = \frac{(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{\beta} - \vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}|}, \quad \text{αλλά } (\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha}^2 = 4 - 4 = 0,$$

$$\text{άρα } \text{συν}\omega = 0, \quad \text{δηλαδή } \omega = \frac{\pi}{2}.$$

$$41. \quad |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 + 2\text{συν}\theta = 2(1 + \text{συν}\theta) = 4\text{συν}^2 \frac{\theta}{2}, \quad \text{άρα}$$

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2 \left| \text{συν} \frac{\theta}{2} \right|.$$

42. Ισχύουν $\vec{\alpha} \vec{\beta} = 0$, $\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha} \vec{\beta} = 0$ και $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha} \vec{\beta} = 4$

44. $3\vec{v} - 5\vec{u} = (22, -24)$, αν $\vec{w} = (x, y)$, τότε πρέπει $22x - 24y = 0$ (1)

δηλαδή υπάρχουν άπειρα διανύσματα \vec{w} των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την (1).

45. $\vec{\alpha} \vec{\beta} = \frac{1}{2}$ και ισχύει: $\vec{x} = \kappa(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta}(\vec{\alpha} + \vec{x}) = 0$, άρα $\vec{\beta} \vec{\alpha} + \vec{\beta} \vec{x} = 0$,

δηλαδή $\frac{1}{2} + \vec{\beta}[\kappa(\vec{\alpha} + \vec{\beta})] = 0$, άρα $\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2} + \kappa = 0$, οπότε $\kappa = -\frac{1}{3}$.

46. Έστω $\vec{\beta}_1 = (x_1, y_1)$ και $\frac{1}{2}$ και $\vec{\beta}_2 = (x_2, y_2)$ οι συνιστώσες. Τότε ισχύει:

$$\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 = \vec{\beta} \quad (1), \quad \vec{\beta}_1 \vec{\beta}_2 = 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}_2 // \vec{\alpha} \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$y_1 + y_2 = 10$$

οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$x_2 + y_2 = 0$$

Το σύστημα δίνει για λύση $x_2 = y_2 = \frac{15}{2}$ και $x_1 = -\frac{5}{2}$, $y_1 = \frac{5}{2}$.

47. Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη με $\vec{\alpha}$.

48. α) $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\cos \omega| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\cos \omega| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ όπου ω η γωνία των $\vec{a}, \vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (x, y)$. Τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 6x - 8y$,
 άρα από το (α) ισχύει $|6x - 8y| \leq 6 \cdot 10$, άρα $-60 \leq A \leq 60$.

γ) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (\eta\mu\chi, \sigma\upsilon\nu\chi)$. Τότε $|\vec{\beta}| = 1$,
 άρα $|6\eta\mu\chi - 8\sigma\upsilon\nu\chi| \leq 6 < 10$.

49. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $(\vec{AB} + \vec{AG}) \cdot \vec{AM} = 0$, όμως $\vec{AB} + \vec{AG} = 2\vec{AD}$
 (AD διάμεσος), άρα ισχύει $\vec{AD} \cdot \vec{AM} = 0$, δηλαδή $\vec{AM} \perp \vec{AD}$, άρα το M
 κινείται σε ευθεία κάθετη στην AD στο σημείο A .

50. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - \vec{x} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{x} - \vec{x} \cdot \vec{\beta} = 0$

54. α) $(\lambda\vec{a} + \kappa\vec{\beta}) \cdot (\kappa\vec{a} - 2\lambda\vec{\beta}) = 0$, οπότε για $\lambda = 0$ και $\kappa = 1$ προκύπτει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$.

β) Για $\kappa = \lambda = 1$ προκύπτει $(\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{\beta}) = 0$ ή $\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\beta}^2 = 0$ και
 με βάση την (α) $\vec{\beta}^2 = 2$ ή $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$.

55. Από τις δοσμένες σχέσεις έχουμε:

$$\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}^2$$

$$\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}^2 \quad \text{δηλαδή}$$

$$2\vec{\alpha}\vec{\beta} = -\vec{\alpha}^2 = -\vec{\beta}^2, \quad \text{άρα}$$

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}^2 = 3\vec{\alpha}^2$$

56. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = 0$, άρα $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2(\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\vec{\gamma}) = 0$, άρα

$$\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\alpha}\vec{\gamma} = -19.$$