ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 3ο: ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό - Λάθος"

1.	Σ	20.	Σ	39.	Λ	58.	Σ
2.	Σ	21.	Λ	40.	Σ	59.	Σ
3.	Σ	22.	Σ	41.	Σ	60.	Λ
4.	Λ	23.	Λ	42.	Σ	61.	Λ
5.	Σ	24.	Λ	43.	Σ	62.	Σ
6.	Σ	25.	Λ	44.	Λ	63.	Σ
7.	Λ	26.	Σ	45.	Λ	64.	Σ
8.	Λ	27.	Λ	46.	Λ	65.	Σ
9.	Σ	28.	Λ	47.	Σ	66.	Λ
10.	Σ	29.	Σ	48.	Λ	67.	Λ
11.	Λ	30.	Σ	49.	Σ	68.	Σ
12.	Σ	31.	Σ	50.	Σ	69.	Λ
13.	Λ	32.	Σ	51.	Λ	70.	Λ
14.	Λ	33.	Λ	52.	Λ	71.	Σ
15.	Σ	34.	Σ	53.	Λ	72.	Λ
16.	Λ	35.	Σ	54.	Λ	73.	Σ
17.	Σ	36.	Σ	55.	Σ		
18.	Λ	37.	Σ	56.	Λ		
19.	Σ	38.	Σ	57.	Λ		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Β	16.	Β	31.	Α	46.	Β
2.	Δ	17.	Α	32.	Δ	47.	Β
3.	Β	18.	Δ	33.	Β	48.	Β
4.	Α	19.	Ε	34.	Β	49.	Β
5.	Ε	20.	Γ	35.	Δ	50.	Γ
6.	Δ	21.	Δ	36.	Β	51.	Γ
7.	Γ	22.	Β	37.	Α	52.	Δ
8.	Δ	23.	Δ	38.	Ε	53.	Γ
9.	Β	24.	Γ	39.	Ε	54.	Β
10.	Δ	25.	Γ	40.	Ε	55.	Β
11.	Α	26.	Δ	41.	Ε	56.	Δ
12.	Δ	27.	Β	42.	Β	57.	Ε
13.	Ε	28.	Ε	43.	Δ	58.	Δ
14.	Β	29.	Γ	44.	Δ	59.	Ε
15.	Γ	30.	Δ	45.	Α		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Γ
2	Α
3	Ε
4	Β

2.

1	Γ
2	Ε
3	ΣΤ
4	Β

3.

1	Γ
2	Ε
3	Α
4	Β

4.

1	Β
2	Α
3	Ε
4	ΣΤ

5.

1	Β
2	Α
3	Δ

6.

1	Β
2	Δ
3	Ε

7.

1	Γ
2	Δ
3	Α
4	ΣΤ
5	Β

8.

1	Γ
2	Ε
3	ΣΤ
4	Δ

9.

1	Δ
2	Β
3	Ε
4	Α

10.

1	Ε
2	Β
3	Γ

11.

1	Β
2	Ε
3	Α

12.

1	Γ
2	Α
3	ΣΤ
4	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. C_4, C_1, C_5, C_3, C_2

2. C_3, C_2, C_5, C_4, C_1

3. Δ, Γ, Β, Α, Ε

4. $d_E, d_B, d_Γ, d_Δ, d_A$

5. C_2, C_1, C_3, C_4, C_5

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $x^2 + y^2 = 8$

β) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

γ) $(x + 2)^2 + (x - 1)^2 = 4$

δ) Έχει κέντρο το μέσο Μ (- 1, 4) του ΑΒ και ακτίνα $\frac{1}{2}$ (ΑΒ),

άρα $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$

ε) Ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$

στ) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

ζ) $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 100$

η) Πρέπει να ισχύει $ρ = d(O, ε) = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$, άρα ο κύκλος έχει εξίσωση

$x^2 + y^2 = 10$

θ) Ο κύκλος έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - 4)^2 = 16$, το (5, 4) ανήκει στον κύκλο και προκύπτει $x_0 = 9$ ή $x_0 = 1$

ι) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

ια) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

ιβ) $ρ = d(A, ε) = \frac{10}{5} = 2$

2. Οι $ε_1$, $ε_2$ είναι παράλληλες, η μεσοπαράλληλη θα έχει εξίσωση (ε): $y = -3x + 3$ (αφού $ε_1$: $y = -3x - 6$ και $ε_2$: $y = -3x + 12$), το κέντρο Κ (x_0, y_0) ανήκει στην (ε), άρα $y_0 = - 3x_0 + 3$. Η απόσταση μεταξύ των $ε_1$, $ε_2$ είναι $\frac{18}{\sqrt{10}}$, άρα $ρ = \frac{9}{\sqrt{10}}$ και αφού το (1, 0) ανήκει στον κύκλο θα ισχύει: $(1 - x_0)^2 + y_0^2 = \frac{81}{10}$, οπότε υπολογίζονται τα x_0, y_0 ($x_0 = 1,8$, $y_0 = - 2,4$)

3. Το κέντρο Κ έχει συντεταγμένες x_0, y_0 με $x_0 = y_0$ και $d(Κ, ε) = ρ = x_0$ (λόγω επαφής με τους άξονες), άρα $\frac{|2x_0 - 6|}{\sqrt{2}} = x_0$, άρα $x_0 = 6\sqrt{2}$

4. Από το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας και του κύκλου προκύπτει η εξίσωση $(λ^2 + 1)\, x^2 - 4x + 1 = 0$ με $Δ = - 4\,(λ^2 - 3)$

α) Θα πρέπει $Δ > 0$, άρα $-\sqrt{3} < λ < \sqrt{3}$

β) Πρέπει $Δ = 0$, άρα $λ = \sqrt{3}$ ή $λ = -\sqrt{3}$

γ) Πρέπει $Δ < 0$, άρα $λ < -\sqrt{3}$ ή $λ > \sqrt{3}$

5. Το κέντρο είναι το Κ (1, 3). Το $λ_ε = -\frac{1}{2}$, άρα η ζητούμενη έχει εξίσωση $y - 3 = 2\,(x - 1)$

6. Κάθε ευθεία έχει $λ = - 1$ και η $(ε_1)$ τέμνει τον x΄x στο $(0, 4\sqrt{2})$, η $ε_2$ τον x΄x στο $(0, - 4\sqrt{2})$, άρα $ε_1$: $y - 4\sqrt{2} = - x$ και $ε_2$: $y + 4\sqrt{2} = - x$

7. Αν (x_0, y_0) σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση (ε): $x_0x + y_0y = 9$, το (0, 6) ανήκει στην (ε), άρα $y_0 = \frac{3}{2}$, οπότε $x_0 = \pm \frac{5}{2}$, άρα οι εφαπτόμενες είναι (ε_1): $\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 9$ και (ε_2): $-\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 9$

8. Το κέντρο του δοσμένου κύκλου είναι Κ (1, - 2) και ρ = d (Κ, ε) όπου ε: y - x = 0, άρα $\rho = \frac{3}{\sqrt{2}}$

9. Το σύστημα των δύο εξισώσεων δίνει την $x^2 - 4x + 4 = 0$, $\Delta = 0$, άρα η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο στο (2, - 1)

10. **α)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$

β) Το ΑΒΓ τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α, άρα το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου βρίσκεται στο μέσον Μ $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ του ΒΓ και ρ = $\frac{B\Gamma}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

11. Προφανώς το κέντρο είναι το Ο (0, 0) και ακτίνα ρ = 3α

12. Το κοινό σημείο των ευθειών είναι το Μ (συνθ, ημθ) για το οποίο ισχύει $x^2 + y^2 = 1$, άρα το Μ ανήκει σε μοναδιαίο κύκλο

13. Αν Κ (x_0, y_0) το κέντρο, τότε $2x_0 + y_0 + 1 = 0$ (1)

Ακόμη το Κ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΑΒ, δηλαδή

στην (ε΄): $y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}(x - 1)$, άρα $y_0 = \frac{4}{3}x_0 - \frac{5}{6}$ (2)

Το σύστημα των (1), (2) δίνει τα x_0, y_0. Η απόσταση ΚΑ είναι η ακτίνα

14. Τα κέντρα των κύκλων K_1 (2, 0) και K_2 (1, 0) και οι ακτίνες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 1$.

Παρατηρούμε $K_1K_2 = 1$ και $\rho_2 - \rho_1 = 1$

15. $A_1 = A_2$ και $B_1 = B_2$

16. $(MA)^2 + (MB)^2 + (M\Gamma)^2 = c$, άρα $3x^2 + 3y^2 - 6y + 11 - c = 0$ ή

$x^2 + y^2 - 2y + \frac{11-c}{3} = 0$.

Για κατάλληλο c είναι κύκλος με κέντρο Κ (0, 1) που είναι το κέντρο βάρους του ΑΒΓ

17. Η εξίσωση γράφεται $(x + \frac{\lambda}{2})^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4}$, άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο

Κ $(-\frac{\lambda}{2}, 0)$ που ανήκει πάνω στον άξονα x΄x

18. Αν Κ (0, - 2) το κέντρο του κύκλου τότε η ζητούμενη ευθεία (ε) είναι κάθετη στην ΚΑ. $\lambda_{AK} = -1$, άρα $\lambda_\varepsilon = 1$ οπότε (ε): $y + 1 = 1(x + 1)$ ή $y = x$

19. **α)** $y^2 = 10x$

β) $y^2 = 2ρx$ με $-2ρ = 16$, άρα $ρ = -8$

γ) $x^2 = 2ρy$ με $4 = 4ρ$, άρα $ρ = 1$

δ) $x^2 = 2ρy$ με $ρ = -8$

ε) $y^2 = 2ρx$ με $ρ = -4$

στ) Το σύστημα των $y^2 = 2ρx$ και $y = 4x + 1$ δίνει την $16x^2 + (8 - 2ρ)x + 1 = 0$. Πρέπει $Δ = 0$, άρα $(8 - 2ρ)^2 = 64$, άρα $ρ = 8$

20. Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι αδύνατο.

21. Η εξίσωση της εφαπτομένης: $y_0 y = \frac{3}{2}(x + x_0)$

Για $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ προκύπτει $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$

Για $x_0 = 12$, $y_0 = 6$ προκύπτει η άλλη εφαπτομένη

22. Αν (x_0, y_0) το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε), τότε $λ_ε = \frac{ρ}{y_0} = \frac{3}{2y_0}$,

όμως $λ_ε = 2$, άρα $y_0 = \frac{3}{4}$ και $x_0 = \frac{9}{12}$

23. **α)** Αν $M(x_0, y_0)$ σημείο επαφής, τότε το $K(-2, 3)$ ανήκει στην $y_0 y = 4(x + x_0)$, δηλαδή $4x_0 - 3y_0 = 8$, όμως $y_0^2 = 8x_0$. Το σύστημα δίνει τα σημεία επαφής $A(8, 8)$ και $B(\frac{1}{2}, -2)$

β) $λ_{AK} = \frac{1}{2}$ και $λ_{BK} = -2$

24. Η τεταγμένη του Α είναι $y_A = 4ρ$, άρα $x_A = 4ρ$. Όμοια $x_B = 4ρ$ και $y_B = - 4ρ$, άρα $OA \perp OB$

25. Αν Α $(x_0, 2\sqrt{ρx_0})$, τότε Β $(x_0, - 2\sqrt{ρx_0})$, και $OA = OB = 4\sqrt{ρx_0}$, άρα $4\sqrt{ρx_0} = \sqrt{ρx_0^2 + 4ρx_0}$ ή $x_0 = 12ρ$, άρα $y_0 = 4ρ\sqrt{3}$ ή $- 4ρ\sqrt{3}$

26. **α)** ΕΑ = d (Α, δ) = ΚΕ εξ ορισμού (δ η διευθετούσα), άρα ΑΒ = 2ΚΕ

β) Το Α έχει συντεταγμένες $(\frac{ρ}{2}, ρ)$ και η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση (ε): $ρy = ρ\,(x + \frac{ρ}{2})$. Προφανώς το σημείο $(- \frac{ρ}{2}, 0)$ ανήκει στην (ε). Για την εφαπτομένη στο Β όμοια

27. Αν η ΟΒ έχει εξίσωση $y = λx$, $λ > 0$, τότε η ΟΓ έχει εξίσωση $y = - \frac{1}{λ}x$. Τα σημεία Β, Γ έχουν συντεταγμένες $(\frac{2ρ}{λ^2}, \frac{2ρ}{λ})$ και $(2ρλ^2, 2ρλ)$ η εξίσωση της ΒΓ: $(\frac{1}{λ} + λ)\,x + (λ^2 - \frac{1}{λ^2})\,y - (\frac{2ρ}{λ} + 2ρλ) = 0$ ή $x - (λ + \frac{1}{λ})\,y - 2ρ = 0$ που περνά από το σημείο $(2ρ, 0)$ για κάθε λ

28. **α)** Ε $(\frac{1}{8}, 0)$

β) (ΑΕ) > (ΟΕ)

γ) Αν $y^2 = 2ρx$ η παραβολή με $ρ > 0$ και Α $(x_0, \sqrt{2ρx_0})$ τυχόν σημείο της, τότε $(ΑΕ) > \frac{ρ}{2} = ΟΕ$

δ) Πρέπει ΑΕ = ρ, άρα Α $(\frac{ρ}{2}, ρ)$

29. **α)** Ε (1, 0) που ανήκει στην (ε)

β) Η λύση του συστήματος δίνει Α $(3 + 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$, Β $(3 - 2\sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$

γ) Αν ε_A, ε_B οι εφαπτομένες, τότε $\lambda_{\varepsilon_A} = \dfrac{2}{2+2\sqrt{2}}$, $\lambda_{\varepsilon_B} = \dfrac{2}{2-2\sqrt{2}}$, που έχουν γινόμενο - 1

δ) Έστω Α $(\dfrac{y_1^2}{2\rho}, y_1)$, Β $(\dfrac{y_2^2}{2\rho}, y_2)$, τα δύο σημεία, τότε τα Α, Β, Ε είναι συνευθειακά και προκύπτει $\dfrac{\rho}{y_1} \cdot \dfrac{\rho}{y_2} = -1$

30. $x = \dfrac{x'}{\alpha}$, $y = \dfrac{y'}{\alpha}$ και $y^2 = 2\rho x$, άρα $(y')^2 = 2\alpha\rho \cdot x'$

31. **α)** Αν $x = 2\rho\kappa^2$ και $y = 2\rho\kappa$, τότε $y^2 = 2\rho x$

β) Τα σημεία Α, Β, Ε είναι συνευθειακά με Ε $(\dfrac{\rho}{2}, 0)$

32. Η εφαπτομένη (ε) στο M_1 είναι η $\alpha^2 x_1 x + \beta^2 y_1 y = \alpha_2\beta_2$ και έχει $\lambda_\varepsilon = \dfrac{-\alpha^2 x_1}{\beta^2 y_1}$

33. **α)** Έστω Α $(x_1 y_1)$ το σημείο επαφής της παραβολής. Τότε η εφαπτομένη ε_1 έχει εξίσωση $4x - y_1 y + 4x_1 = 0$. Πρέπει $d(0, \varepsilon_1) = \sqrt{2}$, άρα $x_1 = 2$ και $y_1 = 4$. Η εφαπτομένη ε_2 έχει σημείο επαφής $(2, -4)$ λόγω συμμετρίας

β) Οι συντελεστές διεύθυνσης είναι 1 και - 1 αντίστοιχα

34. Η απόσταση του κέντρου ενός τυχόντος κύκλου από το Α είναι ίση με την απόσταση από την (ε), άρα ισχύει ο ορισμός της παραβολής

35. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4$

36. **α)** $ε = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και Ε ($\sqrt{3}$, 0)

β) $ε = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και Ε ($\sqrt{5}$, 0)

γ) $ε = \frac{4}{5}$ και Ε (4, 0)

37. Θα πρέπει ΜΕ = ΜΕ΄ = ΕΕ΄ (1)

Όμως εξ ορισμού ΜΕ + ΜΕ΄ = 2α και 2γ = ΕΕ΄, άρα θα έπρεπε 2α = 2γ, άτοπο

38. Ισχύει γ = β και $α^2 = β^2 + γ^2$, άρα $α = \sqrt{2}\,γ$ και $ε = \frac{\sqrt{2}}{2}$

39. Η δεύτερη έλλειψη γράφεται $\frac{x^2}{\frac{α^2}{κ^2}} + \frac{y^2}{\frac{β^2}{κ^2}} = 1$ και έχει $ε = \frac{\sqrt{\frac{α^2}{κ^2} - \frac{β^2}{κ^2}}}{\frac{α}{κ}} = \frac{γ}{α}$

40. $ε_1^2 = 1 - \left(\frac{β}{α}\right)^2$ και $ε_2^2 = 1 - \left(\frac{β}{α}\right)^4 = ε_1^2 = [1 + \left(\frac{β}{α}\right)^2]$, άρα $ε_2 > ε_1$

41. $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $\gamma^2 = \frac{\alpha^2}{2}$ ή $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{\alpha^2}{2}$, άρα $\beta^2 = \frac{\alpha^2}{2}$. Επομένως η έλλειψη έχει μορφή $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{2y^2}{\alpha^2} = 1$

43. **α)** Η συμμετρία οδηγεί στον υπολογισμό των άλλων σημείων $(-1, -\sqrt{3})$, $(1, \sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$

γ) Τα σημεία Μ ανήκουν σε κύκλο με εξίσωση: $x^2 + y^2 = 4$ και στην έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$, άρα είναι τα σημεία του ερωτήματος (α)

44. Αν Μ (x_1, y_1) σημείο επαφής, τότε η ευθεία $9x_1x + 16y_1y = 144$ έχει $\lambda = -1$, άρα $\frac{9x_1}{16y_1} = 1$ και $9x_1^2 + 16y_1^2 = 144$. Άρα $x_1 = \pm\frac{16}{5}$, άρα $y_1 = \pm\frac{9}{5}$

45. **α)** Η μια διαγώνιος του τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης

β) $E = \frac{2\gamma \cdot 2\beta}{2}$

46. Η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτες τις $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$ και $y = \frac{\alpha}{\beta}x$. Αφού $\alpha = 4$, άρα $\beta = 3$, οπότε $\gamma = 5$, άρα:

α) $E_1\,(0, 5)$ $E_2\,(0, -5)$

β) $E_1E_2 = 10$

γ) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

ε) $\varepsilon = \frac{5}{4}$

47. **α)** $E'(-3, 0)$ $E(3, 0)$, άρα $\gamma = 3$ και $\alpha = 2$ και η εξίσωσή της $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

β) $\gamma = 10$, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{3}$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 100$, άρα $\alpha = 6$ και $\beta = 8$

γ) $\gamma = 2$, $\alpha = \beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4$, άρα $\alpha = \beta = \sqrt{2}$

48. Η παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ έχει εξίσωση $y = -\frac{\beta}{\alpha}x + c$, η οποία αν θεωρηθεί σαν σύστημα με την εξίσωση της υπερβολής δίνει πρωτοβάθμια εξίσωση ως προς x

49. Αν (x_0, y_0) σημείο επαφής τότε

το σύστημα $\left.\begin{array}{r} x_0x - y_0y = \alpha \\ y = x \end{array}\right\}$ έχει λύση A $\left(\frac{\alpha^2}{x_0 - y_0}, \frac{\alpha^2}{x_0 - y_0}\right)$ ενώ

το σύστημα $\left.\begin{array}{r} x_0x - y_0y = \alpha^2 \\ y = -x \end{array}\right\}$ έχει λύση B $\left(\frac{\alpha^2}{x_0 + y_0}, \frac{-\alpha^2}{x_0 - y_0}\right)$

και το εμβαδόν του ΟΑΒ είναι α^2

50. $(x')^2 + c^2(y')^2 = \alpha^2$, που είναι εξίσωση έλλειψης

51. **α)** Η ε έχει $\lambda_\varepsilon = \dfrac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}$, άρα η ε΄ έχει εξίσωση: $y - y_1 = -\dfrac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}(x - x_1)$

β) Για $y = 0$, $x = x_1\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha^2} + 1\right) = x_1\varepsilon^2$

Για $x = 0$, $y = y_1\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} + 1\right) = y_1\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$

γ) Το μέσο Μ (x, y) έχει $x = \dfrac{x_1}{2}\varepsilon^2$ και $y = \dfrac{y_1}{2}\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$

δ) $x_1 = \dfrac{2x}{\varepsilon^2}$, $y_1 = \dfrac{2y\beta^2}{\gamma^2}$ ενώ $\dfrac{x_1^2}{\alpha^2} - \dfrac{y_1^2}{\beta^2} = 1$, άρα $\dfrac{x^2}{\dfrac{\gamma^4}{4\alpha^2}} - \dfrac{y^2}{\dfrac{\gamma^4}{4\beta^2}} = 1$, που

είναι εξίσωση της υπερβολής c_1: $\dfrac{x^2}{A^2} - \dfrac{y^2}{B^2} = 1$

ε) $\varepsilon_1^2 = 1 + \dfrac{B^2}{A^2} = 1 + \dfrac{4\beta^2}{4\alpha^2} = \varepsilon^2$

52. Αρκεί να βρεθεί το ρ. Ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \dfrac{\rho^2}{4}$ και η παραβολή $y^2 = 2\rho x$, $\rho > 0$. Το σύστημα δίνει την εξίσωση $x^2 + 2\rho x - \dfrac{\rho^2}{4} = 0$, που έχει ρίζα $x = 1$ (λόγω του σχήματος), άρα $-\dfrac{\rho^2}{4} + 2\rho + 1 = 0$, άρα $\rho = 4 + 2\sqrt{5}$

53. **α)** c_1: $(x - 2\rho)^2 + y^2 = \rho^2$ c_2: $(x - 4\rho)^2 + y^2 = \rho^2$ c_κ: $(x - 2\nu\rho)^2 + y^2 = \rho^2$

β) $2\rho + 4\rho + \ldots + 2\nu\rho = \nu(\nu + 1)\rho$

γ) $y = \rho$, $y = -\rho$

54. Οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις (ε_1): $y = \frac{3}{4}x$ και (ε_2): $y = -\frac{3}{4}x$. Τα σημεία τομής των ε_1, ε_2 με την $y = 2$: Α $(\frac{8}{3}, 2)$, Β $(-\frac{8}{3}, 2)$. Στο τρίγωνο ΑΟΒ: $(AB) = \frac{16}{3}$ και το ύψος $\upsilon = 2$, άρα $(AOB) = \frac{16}{3}$

55. Αν (x_1, y_1) σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη $25x_1x - 4y_1y = 100$ έχει $\lambda = \frac{25x_1}{4y_1} = 3$ (1) ενώ $25x_1^2 - 4y_1^2 = 100$ (2). Το σύστημα των (1), (2) δίνει τα σημεία επαφής

56. Οι εστίες της έλλειψης Ε΄ (- 3, 0) και Ε (3, 0), άρα για την υπερβολή ισχύει $\alpha = \beta$ και $\gamma = 3$, ενώ $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, άρα $\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ και η υπερβολή έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = \frac{9}{2}$

57. Α (1, 3), Β (4,2, 4,6), Γ (4,6, 4,2) και το σύστημα:

$$\begin{aligned} \kappa + 3\lambda + \mu &= -10 \\ 4{,}6\kappa + 4{,}2\lambda + \mu &= -38{,}8 \\ 4{,}2\kappa + 4{,}6\lambda + \mu &= -38{,}8 \end{aligned}$$

έχει λύσεις $\kappa = -6$, $\lambda = -6$, $\mu = 14$, άρα $\rho = 2$

58. **α)** αδύνατο σύστημα

β) η ΟΚ με Ο (0, 0), Κ (3, 2)

γ), δ) Α, Β, Γ, Δ τα σημεία τομής της ΟΚ με τους κύκλους

59. **α)** $\overrightarrow{M_1A} \cdot \overrightarrow{M_1B} = 0$

β) $x^2 + y^2 = 4$

γ) απλό

δ) να δειχθεί ότι $x_0^2 + y_0^2 = 4$ (δεκτή και η γεωμετρική απόδειξη)

60. **α)** Τα σημεία τομής με τους άξονες Α $\left(\frac{\alpha^2}{x_1}, 0\right)$, Β $\left(0, -\frac{\beta^2}{y_1}\right)$

β) $\frac{x_1^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{y_1^2}{\beta^2}$ άρα $\frac{x_1^2}{\alpha^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{x_1^2} < 1$ άρα $-1 < \frac{\alpha}{x_1} < 1$,

άρα $-\alpha < \frac{\alpha^2}{x_1} < \alpha$, άρα το Α βρίσκεται μεταξύ των κορυφών

γ) Λόγω του (β), αν $y_1 > 0$, τότε $y_2 < 0$ και αντίστροφα