

**Ερωτήσεις ανάπτυξης**

1. \* Παρατηρούμε ότι:  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$$1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$$

$$1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$$

Ποιο νομίζετε ότι θα είναι το άθροισμα  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ; Αποδείξτε την ισότητα που συμπεράνατε με επαγωγή.

2. \* Μετράμε τον αριθμό των διαγωνίων μερικών πολυγώνων:

Αριθμός πλευρών	Αριθμός διαγωνίων
τετράπλευρο ( $n = 4$ )	$2 = \frac{4(4-3)}{2}$
πεντάγωνο ( $n = 5$ )	$5 = \frac{5(5-3)}{2}$
εξάγωνο ( $n = 6$ )	$9 = \frac{6(6-3)}{2}$
επτάγωνο ( $n = 7$ )	$14 = \frac{7(7-3)}{2}$

Ποιος νομίζετε ότι θα είναι ο αριθμός των διαγωνίων ενός πολυγώνου με  $n$  πλευρές; Να αποδειχθεί η σχέση που συμπεράνατε με μαθηματική επαγωγή.

3. \* Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του  $n \in \mathbb{N}^*$  για την οποία ισχύει η σχέση  $2^n > n^2$ . Στη συνέχεια να αποδειχθεί η σχέση για κάθε  $n$  μεγαλύτερο ή ίσο από την τιμή που βρέθηκε.

4. \* Να διαπιστώσετε ότι ο αριθμός  $2^{4v} - 1$  για  $v = 1, 2, 3, 4$  είναι πολλαπλάσιο του 15. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι  $2^{4v} - 1 = \text{πολ}15, v \in \mathbb{N}^*$ . Υπάρχει άλλος τρόπος απόδειξης;
5. \*\* Αν  $a, \beta$  ακέραιοι δείξτε ότι  $(a + \beta)^v = a^v + \lambda\beta, \lambda \in \mathbb{Z}$  και  $v \in \mathbb{N}^*$ .
6. \*\* i) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $v \in \mathbb{N}^*$  ισχύει  $2 + 4 + 6 + \dots + 2v = v(v + 1)$   
 ii) Να δείξετε ότι η ισότητα  $2 + 4 + \dots + 2v = v(v + 1) - 1$  αν αληθεύει για  $v$ , τότε αληθεύει και για  $v + 1$ . Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε  $v \in \mathbb{N}^*$ ; Να τη συγκρίνετε με την ισότητα (i) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
7. \*\*\* i) Αποδείξτε ότι  $\sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$ .  
 ii) Έστω ότι ισχύει  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} < 2$  για  $\kappa$  το πλήθος ριζικών, αποδείξτε ότι ισχύει και για  $\kappa + 1$  πλήθος ριζικών. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος ριζικών; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
8. \*\* Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Στην  $\varepsilon_1$  παίρνουμε τα σημεία  $A_1, A_2, A_3$  και στην  $\varepsilon_2$  τα σημεία  $B_1, B_2, B_3$ .  
 i) Ενώνουμε το  $A_1$  με το  $B_1$ . Το  $A_2$  με το  $B_1$  και  $B_2$ , το  $A_3$  με το  $B_1, B_2$  και  $B_3$ . Πόσα ευθύγραμμα τμήματα θα σχηματιστούν;  
 ii) Αν στην  $\varepsilon_1$  θεωρήσουμε  $v$  σημεία  $A_1, A_2, \dots, A_v$ . Αν και στη  $\varepsilon_2$  αντιστοίχως  $v$  σημεία  $B_1, B_2, \dots, B_v$  και ενώσουμε το  $A_1$  με 1, το  $A_2$  με 2, το  $A_3$  με 3 και το  $A_v$  με  $v$  σημεία από την ευθεία  $\varepsilon_2$ , αποδείξτε ότι το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων που σχηματίζονται είναι  $\frac{v(v + 1)}{2}$ .

9. \*\*\* Να αποδειχθεί ότι:  $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + v \cdot 2^{v-1} = (v-1) \cdot 2^v$   
για κάθε  $v \in \mathbb{N}$  με  $v \geq 2$ .
10. \*\*\* Να αποδείξετε ότι για κάθε  $v \in \mathbb{N}^*$  ισχύει:
- α)  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + v(v+1)(v+2) = \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{4}$
- β)  $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2v)^3 = 2v^2(v+1)^2$
11. \*\* Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι όταν διαιρούνται με 3 δίνουν ηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου.
12. \*\* Ο αριθμός 60 διαιρούμενος με τον θετικό ακέραιο  $\delta$  δίνει ηλίκο  $\pi$  και υπόλοιπο 12. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές των  $\delta$  και  $\pi$ .
13. \*\* Αν  $\pi$  και  $\nu$  είναι το ηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης του  $a$  δια του  $\beta > 0$ , τότε να βρεθεί το ηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $-a$  δια  $-\beta$ .
14. \*\* Να αποδείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός ακεραίου  $a$  διαιρεθεί με τον 4, τότε το υπόλοιπο είναι 0 ή 1.
15. \* Να βρεθούν οι ακέραιοι οι οποίοι όταν διαιρούνται με τον 13 δίνουν ηλίκο ίσο με το υπόλοιπο.
16. \*\* Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος  $\delta$ , ο οποίος όταν διαιρεί τον 2285 αφήνει υπόλοιπο 8 και όταν διαιρεί τον 977 αφήνει υπόλοιπο 5.
17. \*\* Ο αριθμός των δένδρων ενός άλσους είναι τριψήφιος και μικρότερος του 150. Αν τα δένδρα μετρηθούν ανά 3 ή 4 ή 5 ή 6 μένουν πάντοτε 2. Πόσα είναι τα δένδρα αυτά;

18. \*\* Οι αριθμοί 100 και 80 όταν διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό, δίνουν αντιστοίχως υπόλοιπα 1 και 8. Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αυτού αριθμού.
19. \*\* Στο σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών να λυθούν τα συστήματα
- α)  $x + y = 200$   
 $(x, y) = 5$
- β)  $x + y = 200$   
 $(x, y) = 3$
20. \*\* Στο σύνολο των θετικών ακεραίων να λυθεί το σύστημα  $(x, y) = 10$   
 $[x, y] = 100$ .
21. \* Να αποδειχθεί ότι:
- i) Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος
  - ii) Η διαφορά δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος
  - iii) Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος
  - iv) Η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος
  - v) Το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι αριθμός περιττός
  - vi) Η διαφορά άρτιου αριθμού από περιττό είναι περιττός
  - vii) Το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός
  - viii) Το γινόμενο ενός άρτιου αριθμού επί ένα περιττό είναι αριθμός άρτιος
22. \* Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.
23. \*\* Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών αρτίων αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 8.
24. \*\* Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο πέντε διαδοχικών ακεραίων είναι πάντοτε διαιρετό δια 120.
25. \*\* Να αποδειχθεί ότι μεταξύ τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών ο ένας είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 3.

26. \*\* Να αποδειχθεί ότι μεταξύ πέντε διαδοχικών φυσικών αριθμών ο ένας είναι πολλαπλάσιο του 5.
27. \*\* Εάν δύο ακέραιοι αριθμοί έχουν διαφορά άρτιο και γινόμενο άρτιο αριθμό να αποδείξετε ότι είναι και οι δύο άρτιοι.
28. \* **i)** Αποδείξτε ότι  $(p + 1)^2 - (p - 1)^2 = 4p$  για κάθε φυσικό  $p$ .  
**ii)** Αποδείξτε ότι ένας φυσικός είναι πολλαπλάσιο του 4 τότε γράφεται σαν διαφορά δύο τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.  
**iii)** Να γραφεί ο αριθμός 80 σαν διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.
29. \*\* Να αποδείξετε ότι κάθε περιττός φυσικός αριθμός διάφορος του 1 μπορεί να τεθεί με τη μορφή διαφοράς δύο τετραγώνων φυσικών αριθμών.
30. \* **α)** Να δείξετε ότι κάθε ακέραιος είναι της μορφής  $2κ$  ή  $2κ + 1$  ( $κ$  ακέραιος).  
**β)** Για κάθε ακέραιο  $a$  ισχύει:  $a^2 = 4κ$  ή  $a^2 = 4κ + 1$ .  
**γ)** Για κάθε ακέραιο  $a$  δείξτε ότι ο αριθμός  $a^2 + a + 1$  είναι περιττός.
31. \*\* Διαθέτουμε 1.500 δρχ., με αυτό το ποσό ο μέγιστος αριθμός κιλών που μπορούμε να αγοράσουμε από ένα προϊόν είναι  $κ$  και παίρνουμε ρέστα 220 δρχ.  
**α)** Αν διαθέτουμε 2.000 δρχ. θα μπορούσαμε να αγοράσουμε 2 κιλά επιπλέον και θα παίρναμε ρέστα 80 δρχ. Πόσο κοστίζει το κιλό του προϊόντος;  
**β)** Ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος αριθμός χαρτονομισμάτων των 5.000 που θα πρέπει να διαθέσουμε για την αγορά του προϊόντος ώστε να μην πάρουμε ρέστα.
32. \*\* Οι ακέραιοι  $a$  και  $β$  διαιρούμενοι με το  $v \in \mathbb{N}^*$  αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο.  
 Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός  $\frac{a-β}{v}$  είναι ακέραιος.

33. \*\* Έστω  $a = \beta \cdot \kappa + \nu$ ,  $0 \leq \nu < |\beta|$ ,  $\beta \neq 0$ . Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $(a + \lambda\beta)$  με το  $\beta$  είναι πάλι  $\nu$ .
34. \*\* Να αποδειχθεί ότι:
- α) ο αριθμός  $\nu^3 - \nu$  είναι πολλαπλάσιο του 24, αν  $\nu$  περιττός φυσικός διάφορος του 1.
  - β) ο αριθμός  $(\nu^2 - 1)\nu^2(\nu^2 + 1)$  είναι διαιρετός δια 60, αν  $\nu$  φυσικός.
  - γ) ο αριθμός  $(\nu^3 - \nu)(\nu^2 - 4)$  είναι πολλαπλάσιο του 120, αν  $\nu$  φυσικός μεγαλύτερος του 2.
35. \* Εάν  $\beta = 1 + \text{πολ}3$  να αποδείξετε ότι:
- α)  $\beta^2 = 1 + \text{πολ}3$       β)  $\beta^3 = 1 + \text{πολ}3$
36. \* Εάν  $\nu = 1 + \text{πολ}5$  να αποδείξετε ότι:  $3\nu^2 + 3\nu - 1 = \text{πολ}5$
37. \* Εάν  $\nu = 2 + \text{πολ}5$  να αποδείξετε ότι:
- α)  $2\nu + 1 = \text{πολ}5$       β)  $\nu + 3 = \text{πολ}5$
38. \* Αν  $\nu = 3 + \text{πολ}5$  ή  $\nu = 1 + \text{πολ}5$ , να αποδείξετε ότι ο 5 διαιρεί τον  $3\nu^2 + 3\nu - 1$ .
39. \*\* Έστω  $\alpha, \beta$  δύο ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 3. Να δείξετε ότι το άθροισμα  $\alpha + \beta$  ή η διαφορά  $\alpha - \beta$  διαιρείται με τον 3.
40. \*\* Αν τα ψηφία ενός τριψηφίου αριθμού είναι διαδοχικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι ο αριθμός διαιρείται με το 3.
41. \*\* Για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}^*$ , να αποδείξετε ότι  $2^{2\nu} + 15\nu - 1 = \text{πολ}9$ .
42. \* Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός  $7^\nu + 5$  είναι πολλαπλάσιο του 3 για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

43. \* Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός  $7^v - 6v - 1$  είναι πολλαπλάσιο του 36 για κάθε  $v \in \mathbb{N}$ , με  $v \geq 2$ .
44. \*\* Σε ένα πάπυρο μιας πυραμίδας της Αιγύπτου βρέθηκε γραμμένος ο μικρότερος θετικός ακέραιος ο οποίος διαιρείται με όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 10. Να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.
45. \*\* Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι  $\alpha, \beta$ .
- α) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:
- i) Αν  $\alpha/\beta$  και  $\beta/\alpha$  τότε  $\alpha = \beta$ .                      ii) Αν  $\alpha/\alpha+\beta$  τότε  $\alpha/\beta$ .
- β) Με τη βοήθεια των i) και ii) του α) να βρείτε όλα τα ζεύγη των θετικών ακεραίων  $\alpha, \beta$  για τα οποία ισχύει: Το γινόμενο  $\alpha \cdot \beta$  διαιρεί το άθροισμα  $\alpha + \beta$ .
46. \* Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός  $\alpha = v(v^2 - 1)(4v^2 - 1)$  διαιρείται με το 5 για κάθε  $v \in \mathbb{N}^*$ .
47. \*\* Έστω ένας διψήφιος αριθμός  $a$ . Αποδείξτε ότι όταν στο τριπλάσιο του αριθμού των δεκάδων του προσθέσουμε τις μονάδες του και το αποτέλεσμα διαιρείται δια του 7, τότε ο αριθμός  $a$  διαιρείται δια 7. Εξετάστε αν ισχύει το παραπάνω κριτήριο για τριψήφιους, τετραψήφιους κ.λπ. αριθμούς.
48. \*\*\* Γράφουμε έναν τριψήφιο αριθμό  $\alpha\beta\gamma$ . Μετά επαναλαμβάνουμε τον ίδιο αριθμό δίπλα στον πρώτο, ώστε να πάρουμε έναν εξαψήφιο της μορφής  $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$ . Να αποδείξετε ότι:
- i)  $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma = 1001(100\alpha + 10\beta + \gamma)$
- ii) Ο αριθμός  $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$  διαιρείται δια του 7 του 11 και του 13.
49. \*\* Αν  $\alpha$  είναι διψήφιος ακέραιος αριθμός και  $\beta$  ο ακέραιος, ο οποίος προκύπτει από τον  $\alpha$ , όταν εναλλάξουμε τα ψηφία του να αποδείξετε ότι η διαφορά  $\alpha - \beta$  διαιρείται με τον 9.

50. \*\* Εάν  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = 1$  και τα κλάσματα  $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$  είναι ανάγωγα να αποδείξετε ότι:
- α) ο  $\beta$  διαιρεί τον  $\delta$                       β)  $|\beta| = |\delta|$
51. \*\* Αν  $\alpha, \beta$  ακέραιοι, να αποδειχθεί ότι:  $(\alpha, \beta) = (5\alpha + 4\beta, \alpha + \beta)$ .
52. \*\* Αν  $(\alpha, \beta) = 1$  και  $\delta/\alpha$  δείξτε ότι  $(\delta, \beta) = 1$ .
53. \*\* Να αποδειχθεί ότι  $(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta\gamma, \beta)$ .
54. \*\* Εάν  $\delta_1 = (\alpha, \beta)$  και  $\delta_2 = (\alpha + \beta\gamma, \alpha + \beta(\gamma-1))$  να αποδείξετε ότι  $\delta_1 = \delta_2$ .
55. \*\* Εάν  $\delta_1 = (\alpha, \beta)$  και  $\delta_2 = (\alpha, \beta\gamma)$  τότε  $\delta_1/\delta_2$ .
56. \* Εάν  $n \in \mathbb{N}^*$  να αποδείξετε ότι:  $(5n + 1, 6n + 1) = 1$
57. \*\* α) Οι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι φυσικοί αριθμοί.  
Να εξετάσετε αν μπορεί η περιμέτρος του να ισούται με πρώτο αριθμό.  
β) Οι πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι φυσικοί αριθμοί.  
Να εξετάσετε αν μπορεί το εμβαδόν του να ισούται με πρώτο αριθμό.
58. \*\* Για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$  να αποδείξετε ότι ισχύει:  
$$(n + 1)(n + 2)(n + 3) \dots (2n - 1) 2n = \text{πολ}2^n$$
59. \*\* Αν ο 2 δεν διαιρεί τον  $x\psi$ , τότε να αποδείξετε ότι:
- i)  $x, \psi$  περιττοί αριθμοί  
ii) ο 2 διαιρεί το  $x^2 + \psi^2$   
iii) ο 4 δεν διαιρεί το  $x^2 + \psi^2$



60. \*\* Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου και ισχύει  $(\alpha, \beta, \gamma) = 7$  και  $[\alpha, \beta, \gamma] = 105$ , να βρεθούν οι  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .
61. \*\* Να δείξετε ότι ο μοναδικός πρώτος της μορφής  $v^3 - 1$  είναι ο αριθμός 7.
62. \*\* Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^2 - kx + \lambda = 0$ ,  $k, \lambda \in \mathbb{Z}$  δεν μπορεί να έχει για ρίζες δύο ανάγωγα κλάσματα.
63. \*\* Αν  $[\beta, \gamma] = \varepsilon$ ,  $[\beta_1, \gamma_1] = \varepsilon_1$ ,  $\beta_1/\beta$  και  $\gamma_1/\gamma$  να αποδείξετε ότι  $\varepsilon_1/\varepsilon$ .
64. \* Ένας ανθοπώλης διαθέτει 30 τριαντάφυλλα, 72 γαρύφαλλα και 54 υάκινθους. Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει; Από πόσα άνθη κάθε είδους θα αποτελείται η κάθε ανθοδέσμη;
65. \* Ένας βοσκός μετρώντας τα πρόβατά του τα έβρισκε πάντα κάπου ανάμεσα στα 113 και 137. Τα μετρούσε σε οκτάδες, δεκάδες ή δωδεκάδες, του περισσευαν πάντα πέντε. Βοηθήστε τον να βρει πόσα πρόβατα έχει ακριβώς.
66. \* Οι μαθητές μιας τάξης μπορούν να τοποθετηθούν σε τετράδες, πεντάδες ή εξάδες χωρίς να περισσεύει κανείς. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός των μαθητών αυτής της τάξης; Ποια μορφή έχουν οι αριθμοί που μπορεί να αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των μαθητών αυτής της τάξης;
67. \* Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι προς διαφορετικές κατευθύνσεις και όταν επιστρέφουν ξαναφεύγουν αμέσως. Το ταξίδι του ενός διαρκεί τρεις ημέρες και του άλλου πέντε ημέρες. Μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί τα δύο πλοία να αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα;
68. \* Τρεις αθλητές τρέχουν ένα κυκλικό στίβο. Ο πρώτος για μία στροφή χρειάζεται 2 λεπτά, ο δεύτερος 3 λεπτά και ο τρίτος 5 λεπτά. Ξεκινούν και οι

τρεις από το ίδιο σημείο. Μετά από πόσα λεπτά θα έχουν συμπληρώσει και οι τρεις (για πρώτη φορά) ακέραιο αριθμό στροφών;

69. \*\* Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^*$ , ναδειχθεί ότι:  
 $(\alpha, \beta) (\beta, \gamma) (\gamma, \alpha) [\alpha, \beta] [\beta, \gamma] [\gamma, \alpha] = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$ .
70. \*\* Οι αριθμοί  $\rho$  και  $8\rho - 1$  είναι πρώτοι. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός  $8\rho + 1$  είναι σύνθετος.
71. \*\* Εάν  $n \geq 1$ , να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $(n + 1)! + 1$  δε μπορεί να γραφτεί ως δύναμη του 2.
72. \*\* Δείξτε ότι το τετράγωνο κάθε πρώτου  $p > 3$  είναι της μορφής  $3\lambda + 1$ .
73. \* Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση  $2x - 3y = 5$ .
74. \*\* Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση  $36x + 42y = 66$ .
75. \*\* Να βρεθούν οι θετικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης  $3x + 5y = 16$ .
76. \* Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση  $4x - 8y = 3$ .
77. \*\* Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας  $(\epsilon): 6x + 5y = 4$ , τα οποία έχουν αρνητική ακέραια τετμημένη και θετική ακέραια τεταγμένη.
78. \*\* Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει μια ανταλλαγή ενός χαρτονομίσματος των 200 δραχ. με κέρματα των 10 και 20 δραχ.; (Θέλουμε κέρματα και των δύο ειδών).
79. \* Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:  
i)  $71x - 50y = 1$

ii)  $43x + 64\psi = 1$

iii)  $243x + 189\psi = 9$

80. \*\* Εάν  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$  να αποδείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση  $\alpha x + \beta \psi = \kappa\alpha + \lambda\beta$  έχει λύση για κάθε  $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ .
81. \*\* α) Να λυθεί η διοφαντική εξίσωση  $4x + 5y = 2$   
β) Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  να βρεθούν τα σημεία της ευθείας που έχει εξίσωση  $4x + 5y = 2$ , τα οποία βρίσκονται στην δεύτερη γωνία των αξόνων και έχουν ακέραιες συντεταγμένες.
82. \*\* Μια ομάδα ποδοσφαίρου για το πρωτάθλημα της Α' Εθνικής κατηγορίας στους αγώνες, που έχει δώσει έως τώρα, έχει συγκεντρώσει 38 βαθμούς και έχει υποστεί 5 ήττες. Αν οι ισοπαλίες που έχει φέρει, είναι περισσότερες από τις ήττες, αλλά και οι νίκες περισσότερες από τις ισοπαλίες, να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των αγώνων, που έχει δώσει η ομάδα αυτή, με δεδομένο ότι, από κάθε νίκη παίρνει 3 βαθμούς, από κάθε ισοπαλία 1 και στην ήττα 0.
83. \*\*\* Ένας χρυσοχόος, επιστρέφοντας στο μαγαζί του, διαπιστώνει ότι του λείπουν οι λίρες που είχε αφήσει το προηγούμενο βράδυ διατεταγμένες σε σχήμα τετραγώνου.  
Στην ερώτηση που έκανε στον υπάλληλό του: "που πήγαν οι λίρες;" πήρε την απάντηση:  
- «Ήρθαν τρεις κλέφτες και τις άρπαξαν. Αφησαν μόνο δύο, που τις έχω στο συρτάρι. Θα τις έπαιρναν και αυτές, αλλά δεν μπορούσαν να τις μοιράσουν εξίσου οι τρεις μεταξύ τους».  
Να εξετάσετε αν ο υπάλληλος έλεγε την αλήθεια.