

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ**  
**ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**

**Κεφάλαιο 2ο: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ**

**Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ  
ΑΠΟΛΥΤΟ ΣΦΑΛΜΑ - ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ  
ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ / ΔΙΑΦΟΡΑΣ / ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ / ΠΗΛΙΚΟΥ**

**Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”**

1.	Λ	8.	Σ	15.	Σ
2.	Λ	9.	Σ	16.	Σ
3.	Λ	10.	Λ	17.	Σ
4.	Σ	11.	Λ	18.	Λ
5.	Λ	12.	Σ	19.	Λ
6.	Σ	13.	Σ	20.	Σ
7.	Σ	14.	Λ	21.	Λ

**Απαντήσεις στις πολλαπλής επιλογής**

1.	A	6.	Δ
2.	Δ	7.	E
3.	Δ	8.	B
4.	E	9.	E
5.	Γ	10.	B

**Απαντήσεις στις αντιστοίχισης**

1.

1	2	3
Γ	Δ	E

2.

1	2	3	4
Δ	E	B	Γ

**Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης**

1. Αφού  $3 < \beta < 4$  και  $7 < \gamma < 8$ , τότε  $9 < \beta^2 < 16$  και  $49 < \gamma^2 < 64$ , άρα  $58 < \beta^2 + \gamma^2 < 80$  ή  $58 < \alpha^2 < 80$
2. Ισχύει  $6,25\sqrt{3} < E < 9\sqrt{3}$ , δηλαδή  $6,25\sqrt{3} < \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} < 9\sqrt{3}$  οπότε  $5 < \alpha < 6$   
και  $15 < 3\alpha < 18$
3. Αφού  $4,5 < R < 5$  τότε  $9\pi < 2\pi R < 10\pi$
4.  $30 \text{ min} = \frac{1}{2} \text{ h}$  και  $45 \text{ min} = \frac{3}{4} \text{ h}$   
 $\frac{1}{2} < t < \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{3} < \frac{1}{t} < 2$ , άρα  $\frac{4 \cdot 14}{3} < v < 2,14$   
 $18,66 \text{ km/h} < v < 28 \text{ km/h}$
5. α)  $4 < t_1 < 5$                       β)  $4 < t_1 < 5$   
 $5 < t_2 < 7$                                $5 < t_2 < 7$   
 $8 < t_3 < 9$                                  $8 < t_3 < 9$   
 $8 < t < 9$                                    $17 < t < 21$
6. Έστω  $t_1$  ο χρόνος που χρειάζεται για εκσκαφή θεμελίων και μπετόν  
Έστω  $t_2$  ο χρόνος που χρειάζεται για κτισίματα - σοβατίσματα  
Έστω  $t_3$  ο χρόνος που χρειάζεται για υπόλοιπες εργασίες  
Τότε ο συνολικός χρόνος θα είναι:  $t_1 + t_2 + t_3 = t$  και  $3 < t_1 < 4$ ,  $2 < t_2 < 3$ ,  
 $1 < t_3 < 2$ , οπότε  $6 < t_1 + t_2 + t_3 < 9$  ή  $6 < t < 9$
7.  $R = 5,15 \pm 0,01$   
 $R \cdot R = \alpha \cdot \alpha \pm (\alpha \cdot \sigma_\alpha + \alpha \cdot \sigma_\alpha) = \alpha \cdot \alpha \pm 2\alpha \cdot \sigma_\alpha$

$$R \cdot R = 5,15^2 + 2 \cdot 5,15 \cdot 0,01$$

$$R^2 = 26,5225 \pm 0,103 \text{ δηλαδή } 26,5225 - 0,103 < R^2 < 26,5225 + 0,103$$

$$\text{οπότε } 26,4195 < R^2 < 26,6255 \text{ και } 3,14 \cdot 26,4195 < \pi R^2 < 3,14 \cdot 26,6255$$

$$\text{οπότε τελικά } 82,96 < \pi R^2 < 83,60$$

$$8. B = 13,2 \pm 0,1 \quad \beta = 8,1 \pm 0,2 \quad v = 5,6 \pm 0,3$$

$$\text{Με έλλειψη: } B_1 = 13,2 - 0,1 = 13,1$$

$$\beta_1 = 8,1 - 0,2 = 7,9$$

$$v_1 = 5,6 - 0,3 = 5,3$$

$$\text{Εμβαδόν με έλλειψη: } E_1 = \frac{(13,1 + 7,9) 5,3}{2} = 55,65$$

$$\text{Με υπεροχή: } B_2 = 13,2 + 0,1 = 13,3$$

$$\beta_2 = 8,1 + 0,2 = 8,3$$

$$v_2 = 5,6 + 0,3 = 5,9$$

$$\text{Εμβαδόν με υπεροχή: } E_2 = \frac{(13,3 + 8,3) 5,9}{2} = 63,72$$

$$9. \eta_{\mu 37^\circ} = 0,601 \pm 0,001$$

10. Αν  $\alpha_1$  προσεγγιστική τιμή του  $\eta_{\mu A}$  έχουμε:

$$\eta_{\mu A} = \alpha_1 \pm 0,02 \text{ ή } |\eta_{\mu A} - \alpha_1| \leq 0,02 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \beta \gamma |\eta_{\mu A} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} \beta \gamma \cdot 0,002 \Leftrightarrow$$

$$|E - \frac{1}{2} \beta \gamma \cdot \alpha_1| \leq \frac{1}{2} \beta \gamma \cdot 0,02 \Leftrightarrow |E - \frac{1}{2} \beta \gamma \cdot \alpha_1| \leq \frac{1}{2} 10 \cdot 12 \cdot 902 = 1,2$$

$$11. 3,8 < x < 4,5$$

$$\text{Έστω } \alpha) \alpha_1 = \frac{3,8 + 4,5}{2} = 4,15 \text{ και } \beta) \alpha_2 = 4,10$$

$$\alpha) 3,8 < x < 4,5 \text{ και } 3,8 - 4,15 < x - 4,15 < 4,5 - 4,15$$

$$\text{οπότε } -0,35 < x - 4,15 < 0,35$$

$$\text{άρα } |x - 4,15| < 0,35$$

$$\beta) 3,8 < x < 4,5 \text{ οπότε } 3,8 - 4,10 < x - 4,10 \text{ ή } 0,3 < x - 4,10 < 0,4 \text{ άρα}$$

$$|x - 4,10| < 0,4$$

Δηλαδή όταν πάρουμε προσεγγιστική τιμή την  $a_2 = 4,10$ , θα έχουμε το μεγαλύτερο απόλυτο σφάλμα.

$$12. \rho_1 = 3,86 \pm 0,01 \quad \rho_2 = 3,84 \pm 0,01$$

$$\rho_1 + \rho_2 = 3,86 + 3,84 \pm 2 \cdot 0,01$$

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{3,86 + 3,84}{2} \pm 0,01$$

$$\rho = 3,85 \pm 0,01 \Leftrightarrow |\rho - 3,85| \leq 0,01 \Leftrightarrow 2\pi |\rho - 3,85| \leq 2\pi \cdot 0,01 \Leftrightarrow$$

$$|2\pi\rho - 2\pi \cdot 3,85| \leq 2 \cdot 3,14 \cdot 0,01 \Leftrightarrow |L - L_1| \leq 0,0628$$

$$13. h = 1200 \text{ m} \quad g = 9,81 \pm 0,01$$

$$\text{Παίρνουμε ως προσεγγιστική τιμή την } \alpha = \sqrt{\frac{2 \cdot 1200}{9,81}} \text{ ή } \alpha = 15,641$$

Ισχύει:  $9,81 - 0,01 \leq g \leq 9,81 + 0,01$  δηλαδή

$$9,80 \leq g \leq 9,82 \text{ οπότε } \frac{1}{9,82} \leq \frac{1}{g} \leq \frac{1}{9,80} \text{ ή } \frac{2400}{9,82} \leq \frac{2h}{g} \leq \frac{2400}{9,80}$$

$$\text{δηλαδή } \sqrt{\frac{2400}{9,82}} \leq \sqrt{\frac{2h}{g}} \leq \sqrt{\frac{2400}{9,80}} \text{ ή } 15,633 \leq \sqrt{\frac{2h}{g}} \leq 15,649$$

$$\text{οπότε } 15,633 - 15,641 \leq t - \alpha \leq 15,649 - 15,641$$

$$\text{ή } -0,008 \leq t - \alpha \leq 0,008, \text{ άρα } \sigma = 0,008$$

$$14. \alpha) \eta_{\mu 31^\circ} = 0,51 \pm 0,01 \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{|\alpha|} = \frac{0,01}{|0,51|} = 0,0196 \dots \leq 0,0197 = 1,97\%$$

$$\beta) \eta_{\mu 29^\circ} = 0,49 \pm 0,01 \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{|\alpha|} = \frac{0,01}{|0,49|} = 0,0204 \dots \leq 0,0205 = 2,05\%$$

Στο  $\eta_{\mu 31^\circ}$  παρουσιάζεται το μικρότερο σχετικό σφάλμα.

$$15. \alpha) \alpha = 4 \pm 0,1 \quad \beta = 8 \pm 0,2$$

$$E = \alpha\beta \pm (\alpha\sigma_\beta + \beta\sigma_\alpha)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\alpha\sigma_\beta + \beta\sigma_\alpha}{|\alpha\beta|} = \frac{4 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,1}{|4 \cdot 8|} = 0,05 \text{ ή } 5\%$$

$$\beta) \alpha = 4 \pm 0,2 \quad \beta = 8 \pm 0,1$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\alpha\sigma_\beta + \beta\sigma_\alpha}{|\alpha\beta|} = \frac{4 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,2}{|4 \cdot 8|} = 0,0625 \text{ ή } 6,25\%$$

Το μικρότερο σχετικό σφάλμα παρουσιάζεται στην πρώτη περίπτωση

$$16. f(x) = 3x + 2 \text{ με } x \approx 4,56, \text{ άρα } x = 4,56 \pm 0,01 \text{ και}$$

$$3x = 3 \cdot 4,56 \pm 3 \cdot 0,01 \text{ δηλαδή } 3x + 2 = 13,68 + 2 \pm 0,03 \text{ ή}$$

$$f(x) = 15,68 \pm 0,03$$

$$\varepsilon = \frac{0,03}{|15,68|} = 0,0191 \dots \leq 0,0192 = 1,92\%$$

$$17. \sqrt{20} = 4,3 \pm 0,1$$

$$\varepsilon = \frac{0,1}{4,3} = 0,0232 \dots \leq 0,0233 = 2,33\%$$

$$\sqrt{29} = 5,3 \pm 0,1$$

$$\varepsilon = \frac{0,1}{5,3} = 0,01886 \dots \leq 0,01887 = 1,887\%$$

$$18. \varepsilon = 0,06\% \quad \alpha = 53,62$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{|\alpha|} \text{ δηλαδή } \sigma = \varepsilon|\alpha| = 0,0006 \cdot 53,62 = 0,032172$$

**19.**  $h = 12 \text{ m}$        $\delta = 50 (1 \pm 0,02) \text{ m}$

$$V = \pi R^2 h = \pi h \frac{\delta^2}{4} = \frac{\pi h \delta^2}{4}$$

$$\frac{\pi h}{4} = \frac{3,14 \cdot 12}{4} = 9,42$$

$\sigma_\delta = |\alpha| \cdot \varepsilon$  οπότε  $\sigma_\delta = 50 \cdot 0,02 = 1$  και  $50 - 1 \leq \delta \leq 50 + 1$  ή  $49 \leq \delta \leq 51$  και

$$2401 \leq \delta^2 \leq 2601 \text{ ή } 9,42 \cdot 2401 \leq \frac{\pi h \delta^2}{4} \leq 9,42 \cdot 2601 \text{ δηλαδή}$$

$$22617,42 < V < 24501,42$$

**20. α)**  $\Gamma = 2\pi\rho$  και  $3,56 - 0,01 \leq \rho \leq 3,56 + 0,01$  δηλαδή

$$6,28 (3,56 - 0,01) \leq 2\pi\rho \leq 6,28 (3,56 + 0,01)$$

$$\Gamma = 6,28 (3,56 \pm 0,01), \text{ άρα } \varepsilon_1 = \frac{0,01}{3,56} = 0,00280 \dots \leq 0,00281 = 0,281 \%$$

**β)**  $3,14 - 0,01 \leq \pi \leq 3,14 + 0,01$  και  $2\rho = 2 \cdot 3,56 = 7,12$

οπότε  $7,12 (3,14 - 0,01) \leq 2\pi\rho \leq (3,14 + 0,01) 7,12$  δηλαδή

$$\Gamma = 7,12 (3,14 \pm 0,01), \text{ άρα } \varepsilon_2 = \frac{0,01}{3,14} = 0,00318 \dots \leq 0,00319 = 0,319\%$$

**21. α)**  $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}$      $9 < \alpha < 10$ , οπότε  $\frac{1}{10} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{9}$

Επίσης  $3 < \beta < 4$ , άρα  $\frac{3}{10} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{4}{9}$ , δηλαδή  $\frac{3}{10} < \eta\mu B < \frac{4}{9}$

**β)**  $\left(\frac{3}{10}\right)^2 < \eta\mu^2 B < \left(\frac{4}{9}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{100} < \eta\mu^2 B < \frac{16}{81} \Leftrightarrow$

$$1 - \frac{16}{81} < 1 - \eta\mu^2 B < 1 - \frac{9}{100} \Leftrightarrow \frac{65}{81} < \sigma\upsilon\nu^2 B < \frac{91}{100} \text{ δηλαδή}$$

$$0,8958 < \sigma\upsilon\nu B < 0,9539$$