

Κεφάλαιο 4ο:

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Α. ΚΥΚΛΟΣ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Η εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$ είναι πάντοτε εξίσωση κύκλου. Σ Λ
2. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο για οποιαδήποτε $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ Σ Λ
3. * Η εξίσωση $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = -25$ είναι εξίσωση κύκλου. Σ Λ
4. * Η εξίσωση $(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$ είναι πάντοτε εξίσωση κύκλου. Σ Λ
5. * Το κέντρο του κύκλου $C: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x + y = -1$. Σ Λ
6. * Το κέντρο του κύκλου $C: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ βρίσκεται πάνω στην διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων. Σ Λ
7. * Το σημείο $(2, -1)$ ανήκει στον κύκλο $C: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 12$. Σ Λ
8. * Τα σημεία τομής των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ με εξισώσεις: $x = 1, x = -1, y = -1$ και $y = 1$ μπορεί να ανήκουν σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$. Σ Λ
9. * Οι κύκλοι με εξισώσεις $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ και $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ έχουν κέντρα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. Σ Λ
10. * Ο κύκλος που έχει κέντρο το $K(0, 3)$ και διέρχεται από το $A(-4, 0)$ έχει ακτίνα $R = 5$. Σ Λ
11. * Ο κύκλος με εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Σ Λ
12. * Ο κύκλος $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα

- σημεία $(-4, 0)$ και $(2, 0)$. Σ Λ
13. * Αν K και K' είναι τα κέντρα των κύκλων με εξισώσεις $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ και $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ αντίστοιχα, O η αρχή των αξόνων, τότε $\vec{OK} \cdot \vec{OK'} = 0$. Σ Λ
14. * Το κέντρο κύκλου με διάμετρο AB , όπου $A(-2, 4)$ και $B(6, -10)$ είναι $K(2, -3)$. Σ Λ
15. * Ο κύκλος με διάμετρο AB , όπου $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Σ Λ
16. * Ο κύκλος με εξίσωση $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ εφάπτεται με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Σ Λ
17. * Ο κύκλος με εξίσωση $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ δεν τέμνει τον άξονα $y'y$. Σ Λ
18. * Η ευθεία $x = 4$ εφάπτεται του κύκλου $C: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$. Σ Λ
19. * Οι κύκλοι με κέντρα $K(0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και ακτίνα λ έχουν εφαπτόμενες τις ευθείες $x = \lambda$ και $x = -\lambda$. Σ Λ
20. * Ο κύκλος με εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \beta^2$ εφάπτεται με τον άξονα $x'x$. Σ Λ
21. * Η ευθεία ε , εφάπτεται σ' έναν κύκλο C , αν και μόνον αν, η απόσταση του κέντρου από την ευθεία, είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Σ Λ
22. * Η ευθεία με εξίσωση $x = 3$, είναι εφαπτομένη του κύκλου $C: (x - 1)^2 + y^2 = 4$. Σ Λ
23. * Η ευθεία με εξίσωση $y = -1$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + (y - 2)^2 = 9$. Σ Λ
24. * Οι κύκλοι με εξισώσεις: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ και $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 36$ δεν έχουν κοινά σημεία. Σ Λ
25. * Οι κύκλοι $C_1: (x + 1)^2 + y^2 = 1$ και $C_2: (x - 1)^2 + y^2 = 1$ είναι εφαπτόμενοι με σημείο επαφής την αρχή των αξόνων. Σ Λ
26. * Οι κύκλοι $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ και $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ είναι εφαπτόμενοι με σημείο επαφής την αρχή των αξόνων. Σ Λ

27. * Δίνονται τα σημεία A (-2, 0), B (4, 6), Γ (6, -2), Δ (-4, 8).
Οι κύκλοι που γράφονται με διαμέτρους AB και ΓΔ είναι ομόκεντροι. Σ Λ
28. * Οι κύκλοι με εξισώσεις $x^2 + y^2 = 1$ και $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ εφάπτονται εξωτερικά. Σ Λ
29. * Οι κύκλοι με εξισώσεις $x^2 + y^2 = 4$ και $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ εφάπτονται εσωτερικά. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Δίνεται ο κύκλος C: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Το σημείο A (κ, λ), κ, λ ∈ R είναι εσωτερικό του κύκλου, αν
A. $\kappa^2 + (\lambda - 2)^2 > 4$ **B.** $(\kappa - 2)^2 + \lambda^2 < 4$ **Γ.** $\kappa^2 + (\lambda - 2)^2 < 4$
Δ. $\kappa^2 + \lambda^2 < 4$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα
2. ** Δίνονται οι κύκλοι C₁, C₂, C₃ με εξισώσεις
 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$,
 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$ αντιστοίχως και οι προτάσεις:
(I) το σημείο A (2, 3) είναι εξωτερικό του C₁
(II) το σημείο A (2, 3) είναι εξωτερικό του C₂
(III) το σημείο A (2, 3) είναι εσωτερικό του C₃
τότε αληθεύουν:
A. I και II **B.** II και III **Γ.** I και III **Δ.** II **Ε.** καμία.
3. * Ο κύκλος C: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν
A. $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ **B.** $R = |\alpha| + |\beta|$ **Γ.** $R = |\alpha + \beta|$
Δ. $R = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}$ **Ε.** $R = |\alpha - \beta|$
4. ** Η εξίσωση της διαμέτρου του κύκλου C: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, που είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $x + y + 1 = 0$, είναι η

- A.** $2x + y - 1 = 0$ **B.** $x = y$ **Γ.** $x = -y$
Δ. $y + x - 2 = 0$ **E.** $-y + 2x = 0$
- 5. *** Ο κύκλος C με εξίσωση $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, τέμνει τους άξονες σε 4 σημεία, αν
A. $\alpha < R$ και $\beta > R$ **B.** μόνο $\beta < R$ **Γ.** μόνο $\alpha > R$
Δ. μόνο $\beta > R$ **E.** $\alpha < R$ και $\beta < R$
- 6. *** Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + (y - \lambda)^2 = 4$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία αν
A. $\lambda \in \mathbb{R}$ **B.** μόνο για $\lambda > 2$ **Γ.** μόνο για $\lambda < -2$
Δ. $-2 < \lambda < 2$ **E.** $\lambda = 2$ ή $\lambda = -2$
- 7. *** Ένας κύκλος εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy , αν το κέντρο του ανήκει στην ευθεία
A. $x = 0$ **B.** $y = 0$ **Γ.** $y = x$
Δ. $y = -x$ **E.** καμία από αυτές
- 8. *** Δίνεται κύκλος κέντρου K (-4, 1) και το σημείο του A (-3, 4). Οι συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού του A είναι
A. (5, 6) **B.** (-5, -2) **Γ.** (5, -6) **Δ.** (-5, -6) **E.** (5, 10)
- 9. **** Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 8 = 0$ έχει κέντρο το σημείο
A. (5, 4) **B.** (-5, 4) **Γ.** (-5, -4) **Δ.** (5, -4) **E.** (8, -8)
- 10. **** Η ακτίνα του κύκλου με εξίσωση $x^2 - 16x + y^2 + 12y = 0$ είναι
A. 8 **B.** 9 **Γ.** 10 **Δ.** 11 **E.** 7
- 11. *** Ποια είναι η καλύτερη προσέγγιση για την ακτίνα του κύκλου
 $(x + 3)^2 + (y - \sqrt{13})^2 = 19$

A. 2, 1 B. 3, 2 Γ. 4, 3 Δ. 5, 1 Ε. 6, 2

12. * Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 4κ + κ^2 + 4 = 0$, $κ \in \mathbb{R}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν

A. $κ = 0$ B. $κ = -1$ Γ. $κ = 2$ Δ. $κ = 4$ Ε. $κ = -4$

13. ** Ο κύκλος C: $x^2 + (y - 5)^2 - (κ - 3)^2 = 0$, $κ \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα x'x σε δύο σημεία, αν

A. $κ = 8$ B. μόνο για $κ > 8$ Γ. μόνο για $κ < -8$
Δ. $κ < -2$ ή $κ > 8$ Ε. κανένα από τα παραπάνω

14. ** Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x - 2)^2 + y^2 = 1$, $C_2: (x - 4)^2 + y^2 = 1$, $C_3: (x - 3)^2 + y^2 = 4$ και οι προτάσεις

I) Οι κύκλοι C_1 και C_3 εφάπτονται
II) Οι κύκλοι C_2 και C_3 εφάπτονται
III) Οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται
τότε αληθεύει
A. μόνο η I B. μόνο η II Γ. μόνο η III
Δ. I και II και III Ε. καμία

15. * Η ευθεία $y = λx + 4$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 8$. Το λ μπορεί να είναι ίσο με

A. 2 B. $\frac{1}{2}$ Γ. $-\frac{1}{2}$ Δ. -1 Ε. 4

16. * Οι κύκλοι $C_1: (x - α)^2 + (y - β)^2 = R^2$ και $C_2: (x + γ)^2 + (y - δ)^2 = r^2$, $α, β, γ, δ \in \mathbb{R}^*$ είναι ομόκεντροι αν

A. $α = -γ$ και $β = δ$ B. $α = γ$ και $β = δ$
Γ. $α = γ$ και $β = -δ$ Δ. $α = -γ$ και $β = -δ$
Ε. $α = δ$ και $β = γ$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Στον παρακάτω πίνακα να συμπληρωθούν τα κενά.

εξίσωση κύκλου	κέντρο	ακτίνα
$x^2 + y^2 = 6$		
$(x + 3)^2 + y^2 = 5$		
$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 3$		
$x^2 + (y + 2)^2 = 2$		

2. * Στον παρακάτω πίνακα να συμπληρωθεί η τρίτη στήλη.

κέντρο κύκλου	ακτίνα	εξίσωση κύκλου
(7, - 6)	5	
(0,0)	$\sqrt{6}$	
(0, - 2)	3	
(5,0)	5	



Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α του πίνακα (I) με αυτά της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

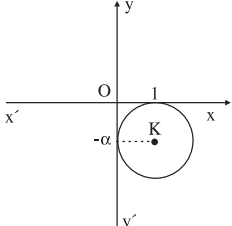
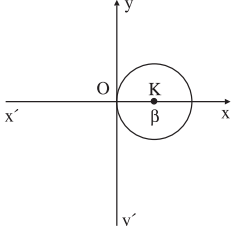
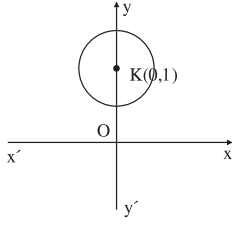
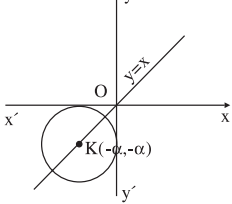
Α στήλη εξισώσεις κύκλων	Β στήλη κέντρα κύκλων, ακτίνας
1. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$	Α. Κ (- 3,2) , R = 2
2. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$	Β. Κ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, R = $\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$	Γ. Κ (- 1, 2) , R = 3
4. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$	Δ. Κ (1, - 2) , R = 4
	Ε. Κ (- 1, 2), R = $\sqrt{5}$
	Ζ. Κ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, R = $\sqrt{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

2. * Να αντιστοιχίσετε κάθε κύκλο της στήλης Α του πίνακα (I) με την εξίσωσή του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α	Στήλη Β
<p>1.</p> 	<p>Α. $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$</p> <p>Β. $(x - 1)^2 + (y + \alpha)^2 = \alpha^2$</p>
<p>2.</p> 	<p>Γ. $(x + \alpha)^2 + (y + \alpha)^2 = \alpha^2$</p>
<p>3.</p> 	<p>Δ. $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$</p> <p>Ε. $(x - \beta)^2 + y^2 = \beta^2$</p>
<p>4.</p> 	<p>Ζ. $x^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2$</p>

Πίνακας (II)

1	2	3	4

Ερωτήσεις ανάπτυξης

- * Ποιες από τις παρακάτω εξισώσεις αποτελούν κύκλο; Στις περιπτώσεις που αποτελούν κύκλο, να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες τους.
 $C_1: x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$
 $C_2: x^2 + y^2 - 2x + 10y + 25 = 0$
 $C_3: x^2 + y^2 - x = 6$
 $C_4: x^2 + y^2 + 6x - 14y + 63 = 0$
 $C_5: 2x^2 + 2y^2 + x + 3y - 1 = 0$
- * Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 5 + \lambda = 0$ να παριστάνει κύκλο.
- * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει ακτίνα $R = 5$ και η τετμημένη του κέντρου του είναι $x_0 = -3$.
- * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει ακτίνα $R = 4\sqrt{5}$ και η τετμημένη του κέντρου του είναι διπλάσια της τεταγμένης.
- ** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2, 1)$, $B(5, 1)$, $\Gamma(2, 5)$ και έστω M το μέσον της $B\Gamma$.
 - Να γράψετε την εξίσωση κύκλου με κέντρο το M και ακτίνα την AM
 - Να εξετάσετε αν ο κύκλος διέρχεται από τα B και Γ .
- * Ο κύκλος $C: (x + 1)^2 + (y - a)^2 = 10$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$.
- * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $K(-4, 5)$ και περνάει από το σημείο $A(3, 3)$.

8. * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο την AB με A (α , 0) και B (0, β).
9. ** Δίνονται τα σημεία A (-1, 0) και B (1, 0). Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων M (x, y), για τα οποία ισχύει $MA^2 + MB^2 = 4$, βρίσκεται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
10. ** Να βρείτε την μικρότερη απόσταση του σημείου A (8, -6) από τον κύκλο C: $x^2 + y^2 - 4 = 0$.
11. * Να υπολογίσετε την απόσταση των κέντρων των κύκλων:
 $C_1: (x + 1)^2 + y^2 = 1$ και $C_2: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.
12. ** Να βρείτε την συνθήκη που πρέπει να ισχύει, ώστε ο κύκλος
 $C: (x - \kappa)^2 + (y - \lambda)^2 = \rho^2$
 α) να εφάπτεται στον άξονα x'x,
 β) να εφάπτεται στον άξονα y'y,
 γ) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
13. * Να εξετάσετε αν η ευθεία $y + x = 1$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.
14. * Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 20$ στο σημείο του A (-4, 2).
15. * Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 4$ με τις ευθείες:
 α) $x = 1$ β) $x = 2$ γ) $x = 3$
16. * Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 9$ με τις ευθείες
 α) $y = 2$ β) $y = 3$ γ) $y = 4$

17. * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$, $B(0, 8)$ και εφάπτεται με τον άξονα $x'x$.
18. ** Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 11 = 0$.
- Να δείξετε ότι η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου C .
 - Να βρείτε την απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε .
19. ** Δίνονται τα σημεία $O(0, 0)$, $B(2, 1)$ και η ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y - 5 = 0$.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στο μέσον του OB .
 - Αφού επαληθεύσετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ , που είναι κάθετη στην ευθεία ε στο σημείο B .
 - Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία O και B και εφάπτεται της ευθείας ε .
20. ** Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = ax + \beta$.
- Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε , είναι εφαπτόμενη του κύκλου C , αν και μόνον αν $\beta^2 = 4 - 4a\beta$.
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C , η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $a = \frac{3}{4}$.
 - Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων, οι οποίες άγονται από το σημείο $M(0,1)$.
21. ** Δίνεται ο κύκλος $C: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$
και η ευθεία $\varepsilon: \sqrt{5}y + 2x = 6 + 2\sqrt{5}$
- Να δείξετε ότι η ε διέρχεται από το κέντρο του C .
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας ε με τον κύκλο C .

22. ** Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1$ $C_2: (x - 4\sqrt{2})^2 + y^2 = 16$.
 Να δείξετε ότι η διχοτόμος της πρώτης γωνίας των αξόνων, είναι κοινή εφαπτομένη των C_1, C_2 .
23. ** Δίνονται ο κύκλος $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x - 3$.
 Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου του συμμετρικού του C ως προς την ευθεία ε .
24. ** Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(1, 4)$, $B(4, 4)$, $\Gamma(4, 1)$, $\Delta(1, 1)$.
 Αφού σχεδιάσετε τον εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο κύκλο:
 α) να γράψετε τις εξισώσεις αυτών των δύο κύκλων, και
 β) να βρείτε την μικρότερη απόσταση του άξονα $y'y$ από τον περιγεγραμμένο κύκλο.
25. ** Σε κυκλικό ρολόι, όταν ο ωροδείκτης δείχνει το 12, η προέκτασή του τέμνει τον κύκλο του ρολογιού στο σημείο $(3, 4)$ (σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων). Το κέντρο του ρολογιού αντιστοιχεί στο σημείο $(1, 2)$.
 α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου του ρολογιού.
 β) Να βρείτε τα σημεία που θα τέμνει, η προέκταση του ωροδείκτη, τον κύκλο του ρολογιού, όταν δείχνει το 3 και όταν δείχνει το 9.
26. ** Δίνονται τα σημεία $A(3, 6)$, $B(8, 6)$, $\Gamma(9, 1)$, $\Delta(2, 1)$.
 α) Να δείξετε ότι τα A, B, Γ, Δ είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου.
 β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου MN αυτού.
 γ) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το μέσο O της MN και ακτίνα ON .
 δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία αυτού του κύκλου και της $\Delta\Gamma$.
27. * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $K(2, 2)$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: x + y - 1 = 0$.

28. * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την τομή των ευθειών $x = 5$ και $y = 4$ και εφάπτεται του άξονα $x'x$.
29. * Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των ευθειών $y = 3$ και $y = -5$ και του άξονα $y'y$.
30. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(3, -4)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και την αρχή των αξόνων.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τον κύκλο.
 - Να βρείτε τα σημεία του κύκλου με την μικρότερη και μεγαλύτερη απόσταση από το A .
 - Προσδιορίστε τα σημεία της ευθείας που είναι εσωτερικά του κύκλου.
 - Προσδιορίστε τα σημεία της ευθείας που είναι εξωτερικά του κύκλου.
31. * Να βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ με τους άξονες.
32. * Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $y = x + \lambda$ να εφάπτεται του κύκλου $x^2 + (y - 1)^2 = 5$.
33. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των ευθειών $y = -\frac{1}{2}x + 3$, $x + 2y + 1 = 0$, και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $y = 2x + 1$.

34. ** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι είναι εξίσωση κύκλου
 - Να δείξετε ότι το σημείο A (3, 2) ανήκει σ' αυτόν τον κύκλο.
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο A.
35. ** Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις
- $$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0 \quad \text{και} \quad C_2: x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$$
- παριστάνουν κύκλους και στη συνέχεια να βρείτε:
- Το κέντρο και την ακτίνα του κάθε κύκλου.
 - Την απόσταση των κέντρων τους. Τι παρατηρείτε;
 - Την εξίσωση της διακέντρου των κύκλων.
36. * Να εξετάσετε την θέση των κύκλων με εξισώσεις:
- $$C_1: x^2 + y^2 = 20 \quad \text{και} \quad C_2: x^2 + y^2 - 10x - 10y + 40 = 0$$
37. * Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 4y = 0$ τέμνονται.
38. ** Δίνονται οι κύκλοι
- $$C_1: x^2 + y^2 + 2x + 3y = 0$$
- $$C_2: x^2 + y^2 + 3x + 2y = 0.$$
- Να βρείτε:
- Το κέντρο και την ακτίνα του κάθε κύκλου.
 - Τα κοινά σημεία τους A, B.
 - Το μήκος της κοινής χορδής AB.
39. ** Δίνονται οι κύκλοι
- $$C_1: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$$
- $$C_2: (x - \frac{5}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$$
- Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται.
 - Να εξετάσετε αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά ή εξωτερικά.
40. ** Δίνονται οι κύκλοι
- $$C_1: (x - 2)^2 + y^2 = 9$$

$$C_2: (x - 2 - 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 9$$

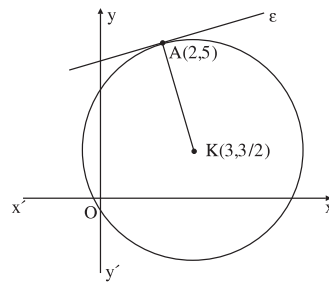
- α) Να βρεθούν τα κοινά σημεία τους Α, Β.
 β) Να δείξετε ότι οι ευθείες ΚΑ και ΛΑ είναι κάθετες, όπου Κ, Λ τα κέντρα των δύο κύκλων και το Α ανήκει στην πρώτη γωνία των αξόνων.

41. ** Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
 $C_2: (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$

- α) Να εξετάσετε αν έχουν κοινά σημεία.
 β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, που εφάπτονται με τον κύκλο C_2 , και είναι παράλληλες με τον άξονα $x'x$.
 γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές οι ευθείες τέμνουν τον κύκλο C_1 .

42. ** Στο διπλανό σχήμα να βρείτε:

- α) το συντελεστή διεύθυνσης της ακτίνας ΚΑ
 β) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ϵ
 γ) τις εξισώσεις των ευθειών ΚΑ και ϵ .



43. *** α) Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και
 $C_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$

Να αποδείξετε ότι αν οι κύκλοι τέμνονται η εξίσωση της κοινής χορδής είναι:

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

β) Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ και
 $C_2: x^2 + y^2 + 2x + y - 2 = 0$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που ορίζουν τα σημεία τομής τους είναι η $4x + 3y - 3 = 0$ και ότι είναι κάθετη στη διάκεντρο των κύκλων.