

Γ. ΕΛΛΕΙΨΗ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Η εξίσωση $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ παριστάνει έλλειψη με εστίες $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α . Σ Λ
2. * Η εξίσωση $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ με $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ παριστάνει έλλειψη με εστίες $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$ και σταθερό άθροισμα 2α . Σ Λ
3. * Τα σημεία $M(x, y)$ με $x = \beta \sin \theta$, $y = \alpha \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$, ανήκουν στην έλλειψη $C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$. Σ Λ
4. * Η εκκεντρότητα της έλλειψης $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι $\varepsilon = \frac{\alpha}{\gamma}$, όπου $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$. Σ Λ
5. * Η εκκεντρότητα της έλλειψης $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$ είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\beta}$. Σ Λ
6. * Η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha, 0)$, $A(\alpha, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B'(0, -\beta)$, $B(0, \beta)$. Σ Λ
7. * Η έλλειψη με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και μεγάλο άξονα παράλληλο προς τον $x'x$ έχει εξίσωση $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1$ και $\alpha > \beta$. Σ Λ
8. * Ο αριθμός $\varepsilon = 1, 2$ είναι εκκεντρότητα έλλειψης. Σ Λ

9. * Η εξίσωση $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ παριστάνει έλλειψη με εστίες σε άξονα παράλληλο των $x'x$. Σ Λ
10. * Η ευθεία με εξίσωση $x = -2$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Σ Λ
11. * Η έλλειψη $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ και η ευθεία $x = 4$ δεν έχουν κοινά σημεία. Σ Λ
12. * Η έλλειψη $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ και η ευθεία $y = 2$ έχουν δύο διαφορετικά κοινά σημεία. Σ Λ
13. * Οι ελλείψεις $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{27} = 1$ είναι όμοιες. Σ Λ
14. * Το κέντρο της έλλειψης $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι το μέσον του τμήματος που ορίζουν οι εστίες. Σ Λ
15. * Μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινάει από τη μία εστία έλλειψης, ανακλώμενη σ' αυτήν, διέρχεται από την άλλη εστία. Σ Λ
16. * Η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x = \alpha, x = -\alpha, y = \beta$ και $y = -\beta$. Σ Λ
17. ** Αν E σταθερό σημείο του επιπέδου και E' το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$, τότε τα σημεία M του επιπέδου, διαφορετικά των E, E' , τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\frac{1}{(ME)} + \frac{1}{(ME')} = \frac{2004}{(ME)(ME')}$ ανήκουν σε έλλειψη με εστίες E, E' και σταθερό άθροισμα 2004. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εκκεντρότητα ϵ . Η ευθεία $x = \frac{3}{2}\alpha$

- A. είναι εφαπτόμενη της έλλειψης C
- B. είναι τέμνουσα της έλλειψης C
- Γ. βρίσκεται εκτός της ελλείψεως
- Δ. βρίσκεται σε απόσταση, από το κέντρο της έλλειψης, ίση με β
- E. κανένα από τα παραπάνω

2. * Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1$ και $\alpha < \beta$ έχει μεγάλο άξονα

- A. παράλληλο προς τον άξονα $x'x$
- B. πάνω στον άξονα $x'x$
- Γ. πάνω στον άξονα $y'y$
- Δ. παράλληλο προς τον άξονα $y'y$
- E. παράλληλο προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$

3. * Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ είναι όμοια με την

- A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$
- B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$
- Γ. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$
- Δ. $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$
- E. $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

4. * Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$ έχει εκκεντρότητα

- A. $\frac{\alpha}{\beta}$
- B. $\frac{\gamma}{\beta}$
- Γ. $\frac{\alpha}{\beta}$
- Δ. $\frac{\gamma}{\alpha}$

E. κανένα από τα παραπάνω

5. * Η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha > \beta$ έχει εστιακή απόσταση:

- A.** $2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ **B.** $2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ **Γ.** $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
Δ. $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

6. * Η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ με εκκεντρότητα ε έχει εστίες:

- A.** $E'(-\alpha, 0)$, $E(\alpha, 0)$
B. $E'(-\alpha\varepsilon, 0)$, $E(\alpha\varepsilon, 0)$
Γ. $E'(-\varepsilon, 0)$, $E(\varepsilon, 0)$
Δ. $E'\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0\right)$, $E\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0\right)$
Ε. κανένα από τα παραπάνω

7. * Η ευθεία με εξίσωση $y = 2$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{k^2} = 1$,

$k > 0$ μόνο όταν:

- A.** $k = 3$ **B.** $k = -2$ **Γ.** $k = 2$ **Δ.** $k = 1$ **Ε.** $k = 9$

8. ** Η ευθεία $y = x + 4$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης $C: \frac{x^2}{k^2} + y^2 = 1$, $k > 0$

όταν

- A.** $k = 2$ **B.** $k = 4$ **Γ.** $k = \sqrt{15}$ **Δ.** $k = -2$
Ε. κανένα από τα παραπάνω

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Σε κάθε έλλειψη της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε τις εστίες της στην στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α Εξίσωση έλλειψης	Στήλη Β Εστίες
1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$	Α. $(-\sqrt{3}+1,0)$, $(\sqrt{3}+1,0)$
2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	Β. $(-\sqrt{5},0)$, $(\sqrt{5},0)$
3. $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$	Γ. $(0,-\sqrt{5})$, $(0,\sqrt{5})$
4. $x^2 + 4y^2 = 4$	Δ. $(-\sqrt{7},0)$, $(\sqrt{7},0)$
	Ε. $(0,-\sqrt{3})$, $(0,\sqrt{3})$
	Ζ. $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

2. * Σε κάθε έλλειψη της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε την εκκεντρότητά της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

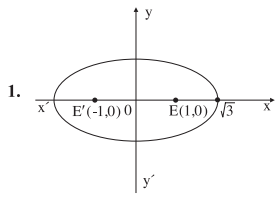
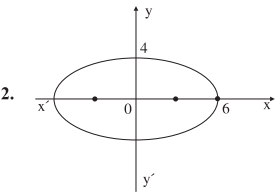
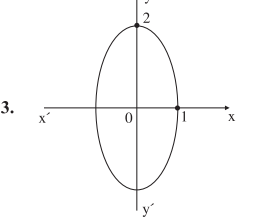
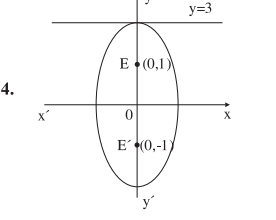
Στήλη Α Εξίσωση έλλειψης	Στήλη Β Εκκεντρότητα
1. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$	Α. $\frac{4}{5}$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$	Β. $\frac{3}{4}$
3. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$	Γ. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
4. $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$	Δ. $\sqrt{5}$
	Ε. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
	Ζ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

3. ** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε έλλειψη της στήλης Α του πίνακα (I) την εξίσωσή της στην στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

Στήλη Α Έλλειψη	Στήλη Β Εξίσωση έλλειψης
<p>1. </p>	<p>Α. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$</p>
<p>2. </p>	<p>Β. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$</p>
<p>3. </p>	<p>Δ. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$</p>
<p>4. </p>	<p>Ε. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$</p>

Πίνακας (II)

1	2	3	4

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Εξίσωση έλλειψης	Εστιακή απόσταση	Εκκεντρότητα	Εστίες	Μεγάλος άξονας
1. $9x^2 + 4y^2 = 36$				
2. $4x^2 + y^2 = 4$				
3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$				

2. ** Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Εξίσωση έλλειψης	Συντεταγμένες κορυφών	Εξισώσεις εφαπτομένων ν στις κορυφές	Εξισώσεις παραβολών με κορυφές τις εστίες της έλλειψης και εστίες τις κορυφές της έλλειψης
1. $x^2 + 4y^2 = 4$			
2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Δίνονται οι ελλείψεις

$$C_1: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \quad C_2: 5x^2 + 6y^2 = 30, \quad C_3: 9x^2 + 4y^2 = 36$$

Να ορίσετε:

α) τις συντεταγμένες των κορυφών τους και να τις σχεδιάσετε.

β) τις συντεταγμένες των εστιών της, την εκκεντρότητα και τα μήκη των αξόνων.

2. * Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$. Να βρείτε τα σημεία της έλλειψης που απέχουν από τον μικρό άξονα 2 μονάδες.

3. * Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ με $x = 1 + 4 \sin \theta$, $y = 2 + 3 \eta \mu \theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$ ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

4. * Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Να βρείτε τα κοινά σημεία της C με την ευθεία ε στις περιπτώσεις:

α) $\varepsilon: x = 3$ **β)** $\varepsilon: x = 4$ **γ)** $\varepsilon: x = 2$ **δ)** $\varepsilon: y = 2$ **ε)** $y = 5$

5. ** Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία

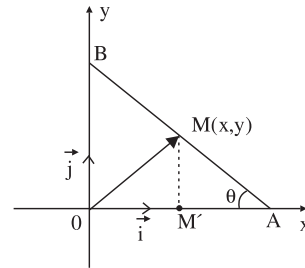
$$K(\alpha \sin \theta, \beta \eta \mu \theta), \theta \in [0, 2\pi) \quad \text{και} \quad \Lambda\left(\alpha \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \beta \eta \mu\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

είναι σημεία της έλλειψης C .

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα \vec{OK} και \vec{OL} όταν $\theta \neq \pi$ και $\theta \neq \frac{3\pi}{2}$ δεν είναι κάθετα.

6. ** Έστω η έλλειψη $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(5, 0)$ και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $x + 2y = 5$ εφάπτεται της έλλειψης C .

7. *** Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους ℓ κινείται κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα άκρα του A, B να κινούνται στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως. Έστω $M(x, y)$ σημείο της AB με $(AM) = \alpha$ και $(MB) = \beta$. Αν η γωνία OAB είναι ίση με θ rad,



- α) Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{OA} = \ell \sin \theta \vec{i}, \quad \vec{AM} = -\alpha \sin \theta \vec{i} + \alpha \cos \theta \vec{j}$$

- β) Να βρείτε την διανυσματική ακτίνα \vec{OM} του σημείου M .

- γ) Να αποδείξετε ότι, όταν $\theta \in [0, 2\pi)$, το σημείο $M(x, y)$ κινείται σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

8. ** Το τόξο μιας γέφυρας πεζών που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι ημιέλλειψη.

Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι 10m, το δε δυνατό ύψος της γέφυρας από το κέντρο του επιπέδου του κέντρου του δρόμου είναι 3m. Να βρείτε το ψηλότερο σημείο της γέφυρας, όταν τοποθετούμε ένα σημείο σε απόσταση 2m από το κέντρο του επιπέδου του δρόμου.

