ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

1ο Κεφάλαιο	ΑΝΑΛΥΣΗ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Η διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σ' ένα ακριβώς στοιχείο ενός άλλου συνόλου Β είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

2. * Η διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε περισσότερα του ενός στοιχεία ενός άλλου συνόλου Β είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

Στις παρακάτω ερωτήσεις όλες οι συναρτήσεις είναι πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του R.

3. * Η σχέση f, με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

4. * Η σχέση $x^2 + y^2 = 1$ όπου $x, y \in R$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

5. * Η σχέση g με τύπο $g(x) = x^2$ είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

6. * Η σχέση f με τύπο $f(x) = 20x$ είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

7. * Η σχέση h με τύπο $h(t) = \pm\sqrt{2t}$, $t \in R^+$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

8. * Η σχέση f με τύπο $f(t) = \sqrt{2t}$, $t \in R^+$, είναι συνάρτηση. **Σ** **Λ**

9. * Αν για μια συνάρτηση f, που έχει πεδίο ορισμού το $A \subseteq R$, ισχύει $f(x) = f(y)$ για κάποια $x, y \in A$, τότε $x = y$. **Σ** **Λ**

10. * Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σ' ένα σύνολο Α, τότε και η συνάρτηση S = f + g ορίζεται στο ίδιο σύνολο. **Σ** **Λ**

11. * Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σ' ένα σύνολο Α, τότε και η συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$ ορίζεται πάντοτε στο ίδιο ακριβώς σύνολο. **Σ** **Λ**

12. * Μια συνάρτηση γνησίως μονότονη είναι πάντοτε γνησίως αύξουσα. **Σ** **Λ**

13. * Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

14. * Οι συναρτήσεις f (x) = ημx και g (x) = συνx είναι συνεχείς. **Σ** **Λ**

15. * Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, x > 0, είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

16. * Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, x < 0, είναι συνεχής. **Σ** **Λ**

17. * Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της. **Σ** **Λ**

18. * Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το Α, λέγεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου Α. **Σ** **Λ**

19. * Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. **Σ** **Λ**

20. * Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. **Σ** **Λ**

21. * Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι πραγματικός αριθμός. Σ Λ

22. * Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής, είναι η παράγωγος της f στο x_0. Σ Λ

23. * Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της $y = f(x)$, ως προς x, όταν $x = x_0$. Σ Λ

24. * Η παράγωγος $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ισούται με το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$. Σ Λ

25. * Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνο όταν υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$. Σ Λ

26. * Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. Σ Λ

27. * Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. Σ Λ

28. * Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$, ισούται με τον συντελεστη διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής. Σ Λ

29. * Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ είναι $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **Σ** **Λ**

30. * Η παράγωγος της συνάρτησης $g(\kappa) = \kappa^q$, όπου $q \in Q$, είναι $g'(\kappa) = q\kappa^{q-1}$. **Σ** **Λ**

31. * Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ είναι αντίστοιχα $f'(x) = (ημx)' = συνx$ και $g'(x) = (συνx)' = -ημx$. **Σ** **Λ**

32. * Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $E(x) = e^x$ και $L(x) = \ln x$ είναι αντίστοιχα $E'(x) = (e^x)' = e^x$ και $L'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. **Σ** **Λ**

33. * Αν η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης g είναι η σταθερή συνάρτηση 1, τότε η g είναι της μορφής $g(x) = cx$, $c \in R - \{1\}$. **Σ** **Λ**

34. * Αν η πρώτη παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g είναι 4ου βαθμού, τότε η g είναι 5ου βαθμού. **Σ** **Λ**

35. * Αν η δεύτερη παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης g είναι σταθερή, τότε η g είναι το πολύ 2ου βαθμού. **Σ** **Λ**

36. * Η συνάρτηση f' με $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, όπου x τα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη, λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f. **Σ** **Λ**

37. * Η παράγωγος (αν υπάρχει) της συνάρτησης g' λέγεται πρώτη παράγωγος της g. **Σ** **Λ**

38. * Η παράγωγος (αν υπάρχει) της συνάρτησης g'' λέγεται τρίτη παράγωγος της g. **Σ** **Λ**

39. * Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 5$ είναι $f'(x) = 5x$. **Σ** **Λ**

40. * Η παράγωγος της συνάρτησης $s(t) = t$ είναι $s'(t) = 1$. **Σ** **Λ**

41. ** Θέσεις πιθανών ακροτάτων συνάρτησης f ορισμένης και συνεχούς σ’ ένα διάστημα Δ είναι μόνο τα σημεία στα οποία η f παραγωγίζεται. **Σ** **Λ**

42. ** Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ’ ένα εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, και υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$, τότε $f'(x_0) = 0$. **Σ** **Λ**

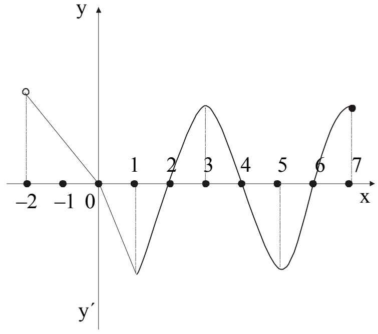
43. ** Αν για συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχή σ’ ένα διάστημα Δ, υπάρχει η $f'(x_0)$ και είναι $f'(x_0) \neq 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου της f. **Σ** **Λ**

44. ** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ. Τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f παραγωγίζεται και η παράγωγος ισούται με μηδέν, είναι θέσεις πιθανών τοπικών ακροτάτων της. **Σ** **Λ**

45. ** Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ. Τα εσωτερικά σημεία x του Δ, στα οποία η f παραγωγίζεται και η παράγωγος $f'(x)$ ισούται με μηδέν, αποτελούν πάντοτε θέσεις τοπικών ακροτάτων της. **Σ** **Λ**

46. ** Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ’ ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. **Σ** **Λ**

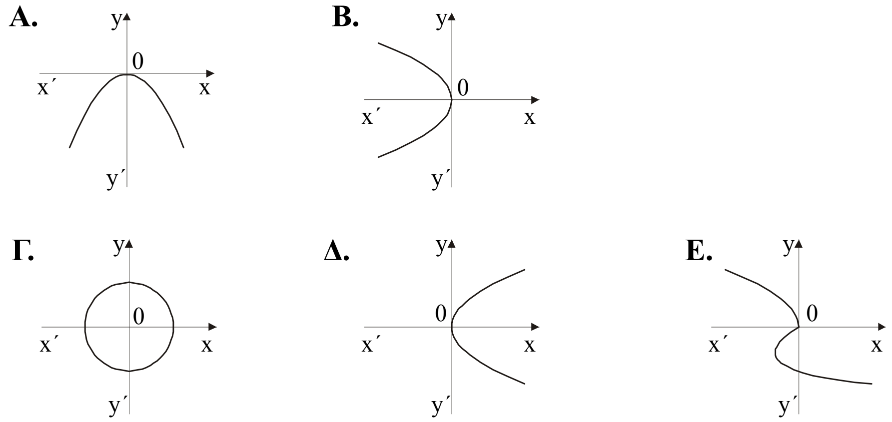
47. ** Στο σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) ή (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:



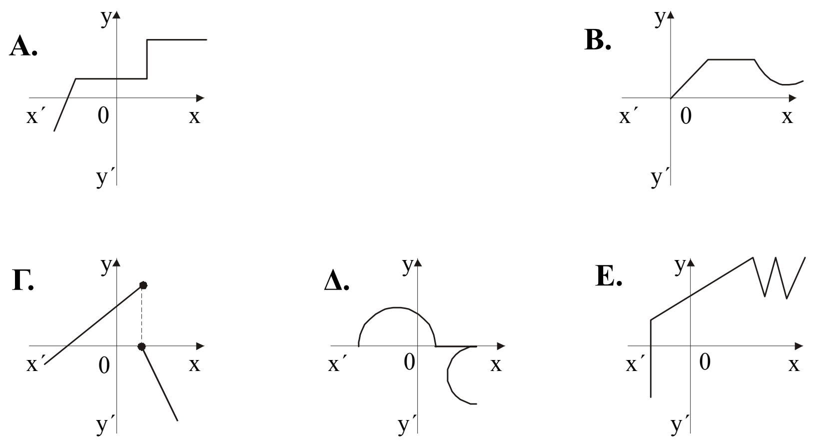
i.	Το πεδίο ορισμού της f είναι [- 2, 7].	**Σ**	**Λ**
ii.	Το πεδίο ορισμού της f είναι (- 2, 7].	**Σ**	**Λ**
iii.	Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο διάστημα (2, 4) τοπικό μέγιστο, για x = 3.	**Σ**	**Λ**
iv.	Ισχύει ότι $f\,'(3) \neq 0$.	**Σ**	**Λ**
v.	Ισχύει $f\,'(x) > 0$ για $x \in (2, 3)$ και $f\,'(x) > 0$ για $x \in (3, 4)$.	**Σ**	**Λ**
vi.	Στο διάστημα (2, 3) η συνάρτηση f είναι αύξουσα.	**Σ**	**Λ**
vii.	Ισχύει $f\,'(5) \neq 0$.	**Σ**	**Λ**
viii.	Οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία (3, f (3)) και (5, f (5)) είναι παράλληλες μεταξύ τους.	**Σ**	**Λ**
ix.	Στο διάστημα (0, 2) η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x = 1.	**Σ**	**Λ**
x.	Ορίζεται το $f\,'(1)$.	**Σ**	**Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

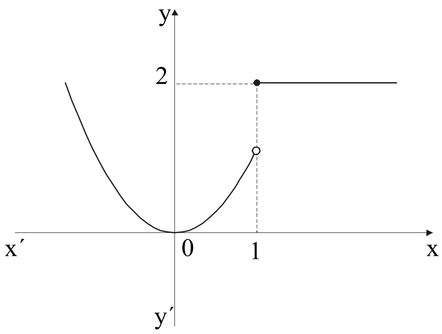
1. * Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;



2. ***** Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;



3. * Το διπλανό διάγραμμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης



Α. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \end{cases}$

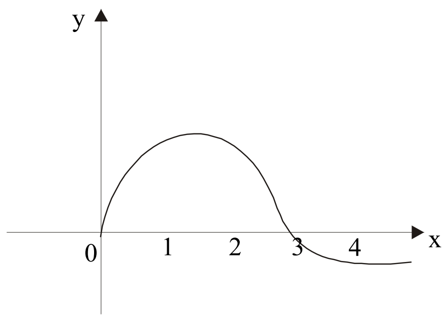
Β. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

Γ. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

Δ. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & -\infty < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \end{cases}$

Ε. $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \end{cases}$

4. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, με γραφική παράσταση που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα, είναι

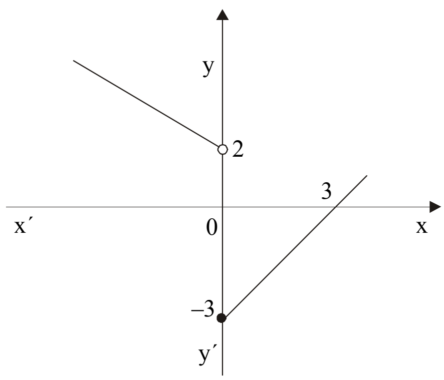


Α. [0, 3] **Β.** [0, ∞)

Γ. (0, 3) **Δ.** (0, + ∞)

Ε. [0, 4]

5. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, με γραφική παράσταση που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα, είναι



Α. (-∞, 2) **Β.** (-∞, 3]

Γ. (-∞, + ∞) **Δ.** (-∞, 3]

Ε. (0, 3]

6. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ είναι

Α. $[-1, 1]$ **Β.** $[-1, \infty)$ **Γ.** $(-1, 1)$ **Δ.** $(-\infty, 1]$ **Ε.** $(-\infty, +\infty)$

7. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ είναι

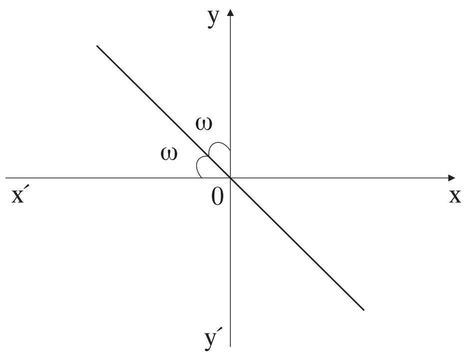
Α. $[-1, 1]$ **Β.** $[-1, \infty)$ **Γ.** $(-1, 1)$ **Δ.** $(-\infty, 1]$ **Ε.** $(-\infty, +\infty)$

8. * Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

Α. $f(x) = -x$ **Β.** $f(x) = x$

Γ. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **Δ.** $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

Ε. $f(x) = -2x$

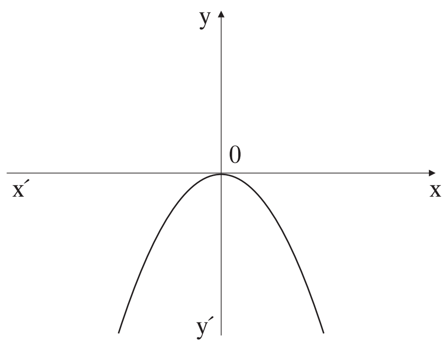


9. * Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

Α. $f(x) = x^2$ **Β.** $f(x) = -x^2$

Γ. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **Δ.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Ε. $f(x) = \dfrac{1}{x}$



10. * Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $A \subseteq R$, τότε η συνάρτηση $h = \dfrac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού

Α. το σύνολο R **Β.** τα $x \in A$: $f(x) \neq 0$ **Γ.** τα $x \in A$: $g(x) \neq 0$

Δ. τα $x \in A$: $f(x) = 0, g(x) \neq 0$ **Ε.** τα $x \in A$: $f(x) = g(x) = 0$

11. * Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν

Α. ισχύει $f(x_0) = 0$

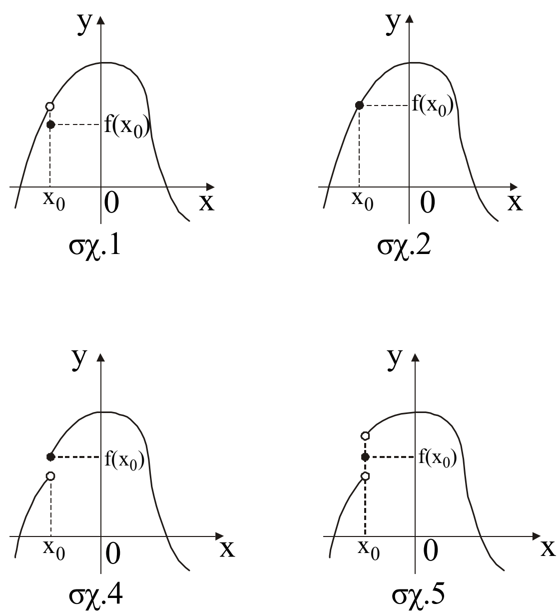
Β. ισχύει $f(x_0) \neq 0$

Γ. υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Δ. ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ε. ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

12. *



Στα παραπάνω σχήματα παρουσιάζονται πέντε γραφικές παραστάσεις ισάριθμων συναρτήσεων. Στη θέση x_0 συνεχής είναι η συνάρτηση

Α. του σχήματος 1 **Β.** του σχήματος 2 **Γ.** του σχήματος 3

Δ. του σχήματος 4 **Ε.** του σχήματος 5

13. * Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν

Α. υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Β. υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Γ. υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ και είναι πραγματικός αριθμός

Δ. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$, $h \in R$, $h \neq 0$

Ε. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$, $h \in R$, $h \neq 0$

14. * Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, εκφράζει

Α. την τιμή της συνάρτησης στη θέση x_0

Β. την τιμή του κλάσματος $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \neq 0$

Γ. το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x = x_0$

Δ. το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς $x - x_0$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

15. * Παράγωγο $f'(x_0)$ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ονομάζουμε

Α. το πηλίκον $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Β. το $\lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0))$, $h \in R$, $h \neq 0$

Γ. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Δ. το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

Ε. το πηλίκον $\dfrac{f(x_0 + h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

16. * Εάν S (t) είναι η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, που κινείται ευθύγραμμα, τότε το κλάσμα $\dfrac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ εκφράζει

Α. τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Β. τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Γ. τη μέση τιμή της επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Δ. τη στιγμιαία τιμή της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Ε. τη διαφορά του διαστήματος που διήνυσε το κινητό από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_0 + h$

17. * Εάν S (t) είναι η θέση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, που κινείται ευθύγραμμα, τότε η τιμή $A = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ εκφράζει

Α. τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Β. τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Γ. τη μέση τιμή της επιτάχυνσης στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_0 + h]$

Δ. τη στιγμιαία τιμή της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = t_0$

Ε. τη διαφορά του διαστήματος που διήνυσε το κινητό από τη χρονική στιγμή t_0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_0 + h$

18. ** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα $\Delta \subseteq R$ και γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η f ΄ είναι αρνητική

Α. μόνο σ' ένα σημείο του Δ

Β. σε όλα τα εσωτερικά σημεία του Δ

Γ. στο σημείο μηδέν

Δ. μόνο στα σημεία που μηδενίζουν την f

Ε. κανένα από τα παραπάνω

19. * Αν για συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση f

Α. παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$

Β. είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ

Γ. παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = x_0$

Δ. δεν παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$

Ε. είναι σταθερή συνάρτηση

20. * Αν για συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση f

Α. παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$

Β. είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ

Γ. παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = x_0$

Δ. δεν παρουσιάζει ακρότατο για $x = x_0$

Ε. είναι σταθερή συνάρτηση

21. * Η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ, είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, αν ισχύει

Α. $f'(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Β. $f(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Γ. $f'(x) > 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Δ. $f'(x) < 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Ε. κανένα από τα παραπάνω

22. * Η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ, είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, αν ισχύει

Α. $f'(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Β. $f(x) = 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Γ. $f'(x) > 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Δ. $f'(x) < 0$, για κάθε σημείο x του Δ

Ε. κανένα από τα παραπάνω

23. ** Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο υπάρχει $f''(x_0)$. Το εσωτερικό σημείο x_0, είναι σημείο ακροτάτου της f, αν ισχύει

Α. $f(x_0) = 0$ **Β.** $f'(x_0) \neq 0$ **Γ.** $f''(x_0) = 0$

Δ. $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) \neq 0$

Ε. $f'(x_0) > 0$ και $f(x_0) = 0$

24. * Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι (για $h \neq 0$)

Α. $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{h(2x+h)}{h}$ **Β.** $\lim\limits_{h \to 0} h(2x+h)$ **Γ.** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

Δ. 2 **Ε.** x

25. * Αν ο μεγιστοβάθμιος όρος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης είναι αx^{α}, όπου $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, τότε η παράγωγός της είναι

Α. σταθερή συνάρτηση

Β. τριγωνομετρική συνάρτηση

Γ. πολυωνυμική συνάρτηση με μεγιστοβάθμιο όρο τον $\alpha^2 x^{\alpha-1}$

Δ. πολυωνυμική συνάρτηση με μεγιστοβάθμιο όρο τον $\alpha x^{\alpha-1}$

Ε. δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε χωρίς τον τύπο της συνάρτησης

26. * Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x^2}$ είναι

Α. σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x$

Β. σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x^2}$

Γ. άλλη μορφή της συνάρτησης $f(x) = x$

Δ. άλλη μορφή της συνάρτησης $f(x) = |x|$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

27. * Η συνάρτηση $f(x) = ημ3x$ είναι

Α. άλλη μορφή της συνάρτησης $f(x) = 3ημx$

Β. η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = συν3x$

Γ. σύνθεση των συναρτήσεων $f(x) = ημx$, $g(x) = 3x$

Δ. η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{συν3x}{3}$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

28. * Αν $L(x) = f(g(x))$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε

Α. $L'(x) = f'(g(x))$

Β. $L'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$

Γ. $L'(x) = f'(x) + g'(x)$

Δ. $L'(x) = f'(g(x)) \cdot f(x)$

Ε. $L'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

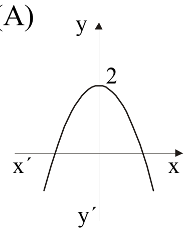
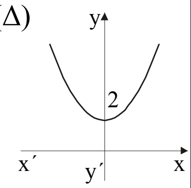
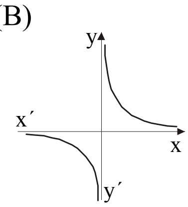
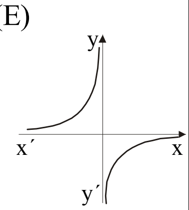
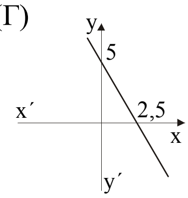
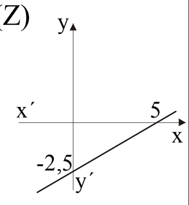
1. * Αντιστοιχίστε τον κάθε τύπο συνάρτησης της στήλης Α με το διάστημα ή ένωση διαστημάτων της στήλης Β, που είναι το πεδίο ορισμού της.

Στήλη Α	Στήλη Β
$f(x) = 2x$	R
$f(x) = \dfrac{3}{x-1}$	$(0, 1)$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x-1}$	$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
	$(1, \infty)$
	$[1, \infty)$

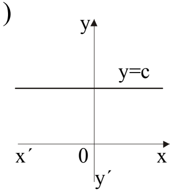
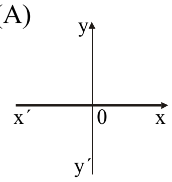
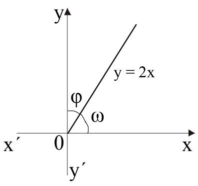
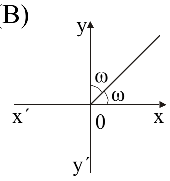
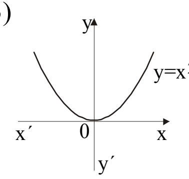
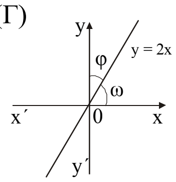
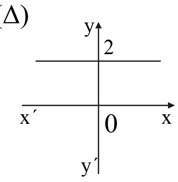
2. * Αντιστοιχίστε τον κάθε τύπο συνάρτησης της στήλης Α με το διάστημα ή ένωση διαστημάτων της στήλης Β, που είναι το πεδίο ορισμού της.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	$[0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[-2, +\infty)$
	$(-2, 0) \cup (0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x+2}$	$(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
	$(-2, 0) \cup (0, \infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$	$(-2, +\infty)$

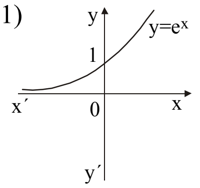
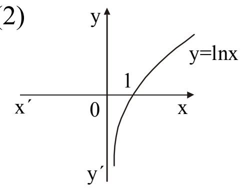
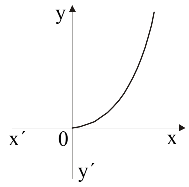
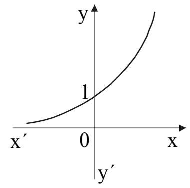
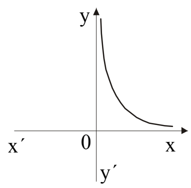
3. * Αντιστοιχίστε τον κάθε τύπο της συνάρτησης της στήλης Α με τη γραφική της παράσταση στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = -3x^2 + 2$	(Α)  (Δ) 
2. $\varphi(x) = \frac{6}{x}$	(Β)  (Ε) 
3. $h(x) = -2x + 5$	(Γ)  (Ζ) 

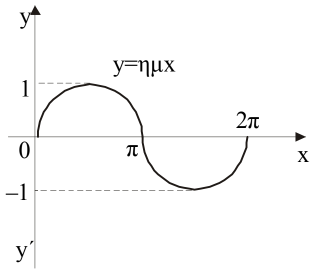
4. * Στη στήλη Α παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων. Αντιστοιχίστε καθεμιά από αυτές με τη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της που βρίσκεται στη στήλη Β.

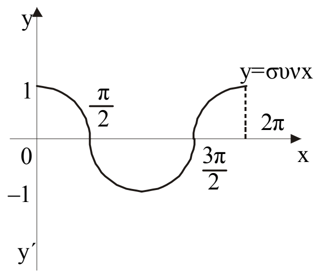
Στήλη Α	**Στήλη Β**
(1) 	(Α) 
(2) 	(Β) 
(3) 	(Γ) 
	(Δ) 

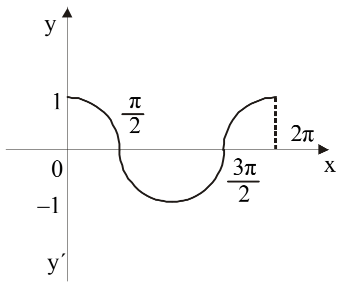
5. ***** Στη στήλη Α παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Αντιστοιχίστε καθεμιά από αυτές με τη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της που βρίσκεται στη στήλη Β.

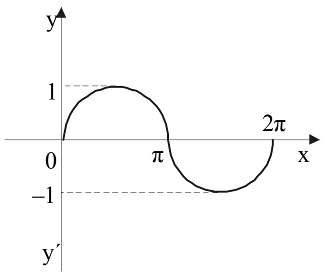
Στήλη Α	**Στήλη Β**
(1)  (2) 	(Α)  (Β)  (Γ) 

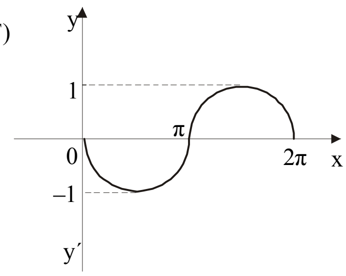
6. ***** Στη στήλη Α παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Αντιστοιχίστε καθεμιά από αυτές με τη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της που βρίσκεται στη στήλη Β.

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr>
<td>
(1)


(2)


</td>
<td>
(Α)


(Β)


(Γ)


</td>
</tr>
</table>

7. * Αντιστοιχίστε κάθε τύπο συνάρτησης που είναι στη στήλη Α με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου της που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄ (x)***
$3x^2$	$6x^2 - 1$
$3x$	$6x$
$2(x^2 - 1)$	3
$(3x)^2$	$4x$
$(3x - 1)^2$	$3x - 1$
$3x^2 - x$	$18x$
	$6(3x - 1)$
	$6x^2$
	$6x - 1$

8. * Αντιστοιχίστε κάθε τύπο συνάρτησης που είναι στη στήλη Α με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου της που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
f (x)	***f ΄(x)***
α	0
αx	α
βx + α	β
$αx^2 + β$	αx + β
$βx^2$	2αx
$αx^2$ - βx	2βx + γ
$βx^2$ + αx - γ	2βx
	2αx - β
	2αx + β
	2βx + α
	2α + βx

9. * Στη στήλη Α του παρακάτω πίνακα υπάρχουν τα πρώτα μέλη ισοτήτων, οι οποίες εκφράζουν τους κανόνες παραγώγισης. Στη στήλη Β υπάρχουν τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων αυτών. Αντιστοιχίστε τα στοιχεία της στήλης Α με εκείνα της στήλης Β ώστε να προκύψουν οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης.

Στήλη Α	Στήλη Β
	$f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
$(c\,f(x))' =$	$\dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$
$(f(x) + g(x))' =$	$f'(x) + g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' =$	$c\,f'(x)$
$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$	$f'(x) \cdot g'(x)$
$[f(g(x))]' =$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
	$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης - σύντομης απάντησης

1. * Να συμπληρώσετε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x^2}$ Α = ...

β) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ A = ...

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ A = ...

δ) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ A = ...

ε) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ A = ...

2. * Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -2$, να βρείτε και να συμπληρώσετε τα $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, όταν:

α) $g(x) = 3f(x) - 1$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

β) $g(x) = 2 - 4f(x)$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

γ) $g(x) = (2f(x))^2$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

δ) $g(x) = \dfrac{2f(x) - 1}{5 - 3f(x)}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

ε) $g(x) = \sqrt[3]{-8f(x) + 11}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ ....

3. * Να συμπληρώσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 6x - 1) =$ ....

β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+1}{3x} =$ ....

γ) $\lim\limits_{x \to 3} (5\sqrt{6x-1}) =$ ....

δ) $\lim\limits_{x \to -1} [(3x+2)(5x-3)]^2 =$ ....

ε) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} [ημx + 3συνx] =$ ....

στ) $\lim\limits_{x \to 0} [2ημx - 4συνx] =$ ....

4. * Να συμπληρώσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ = ...

β) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$ = ...

γ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2(x + 1)}$ = ...

δ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5}$ = ...

5. * Να συμπληρώσετε τις τιμές των παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία:

α) $f(x) = x^2$ $\quad f'(0)$ =...........................

β) $f(x) = x^2 + 1$ $\quad f'(1)$ =...........................

γ) $f(x) = 2x^2 - 3$ $\quad f'(-1)$ = ...

δ) $f(x) = ημx$ $\quad f'(\frac{\pi}{2})$ = ...

ε) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$ $\quad f'(0)$ =...........................

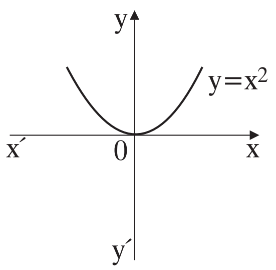
6. * Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα σημεία:

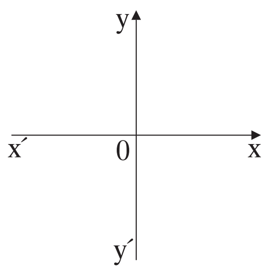
α) $f(x) = x^2 - 1$ $\quad$ Α $(0, f(0))$ $\quad$ y = ...

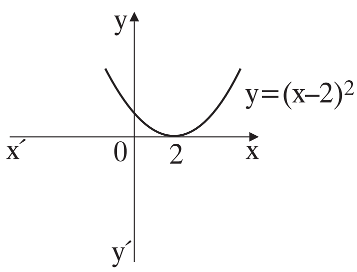
β) $f(x) = 2x^2 - 1$ $\quad$ Α $(1, f(1))$ $\quad$ y = ...

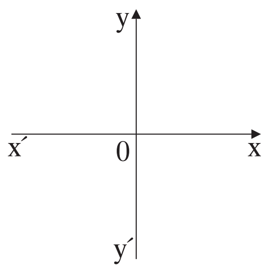
γ) $f(x) = 3x^2 - 2$ $\quad$ Α $(-1, f(-1))$ $\quad$ y = ...

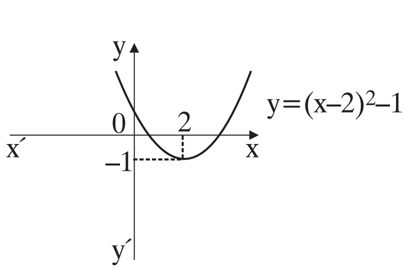
7. * Για κάθε γραφική παράσταση της $y = f(x)$ χαράξτε την αντίστοιχη γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου της.

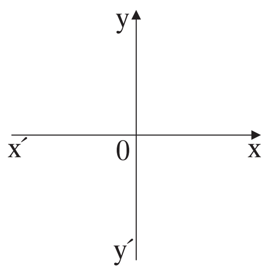

y
y=x2
x´
0
x
y´


y
x´
0
x
y´


y
y=(x–2)2
x´
0
2
x
y´


y
x´
0
x
y´


y
y=(x–2)2–1
0
2
x´
–1
x
y´


y
x´
0
x
y´

8. * Στη στήλη Α δίνονται τύποι συναρτήσεων. Συμπληρώστε στη στήλη Β τους αντίστοιχους τύπους των πρώτων παραγώγων τους.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$x - 1$	
$(x - 1)^2$	
$(x^2 - 1)^2$	
$(x - 1)^{\frac{2}{3}}$	
$\dfrac{1}{(x - 1)^2}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{(x - 1)^3}}$	

9. ***** Στη στήλη Α δίνονται τύποι συναρτήσεων. Συμπληρώστε στη στήλη Β τους αντίστοιχους τύπους των πρώτων παραγώγων τους.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$\sqrt{\eta\mu x}$	
$\sqrt{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$	
$x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$	
$\dfrac{x}{\sqrt{\eta\mu x}}$	
$\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}$	

10. ***** Στη στήλη Α δίνονται τύποι συναρτήσεων. Συμπληρώστε στη στήλη Β τους αντίστοιχους τύπους των πρώτων παραγώγων τους.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$x - \ln x$	
$x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	
e^{-2x^3+1}	
$\ln \sqrt{x^2 - 2}$	

11. * Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τύποι τεσσάρων συναρτήσεων. Να συμπληρώσετε τη στήλη Β με το αντίστοιχο πεδίο ορισμού τους, τη στήλη Γ με την πρώτη παράγωγό τους και τη στήλη Δ και τη δεύτερη παράγωγό τους.

Στήλη Α	**Στήλη Β** ***πεδίο ορισμού***	**Στήλη Γ** ***πρώτη παράγωγος***	**Στήλη Δ** ***δεύτερη παράγωγος***
$h(x) = \frac{1}{x^2}$			
$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$			
$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$			
$g(x) = \frac{x - 1}{x^2}$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) για ποιες τιμές του $x \in A$ έχουμε $f(x) = 0$

γ) το πεδίο ορισμού Β της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$

2. ** Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 + 2$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουμε $g(x) = 0$;

β) Να βρείτε: i) το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

ii) το πεδίο ορισμού Β της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

3. ** Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - 1$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουμε $g(x) = 0$;

β) Για ποιες τιμές του $x \in R$ η συνάρτηση $g(x)$ είναι θετική;

γ) Να βρείτε: i) το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

ii) το πεδίο ορισμού Β της συνάρτησης $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

iii) το πεδίο ορισμού Γ της συνάρτησης $\varphi(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

4. ** Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x - 4$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in R$ έχουμε $g(x) = 0$;

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 4}$

5. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^2 - 4x - 2$ και $g(x) = 3x - 2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) τον τύπο της συνάρτησης $f(x) + g(x)$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Α

β) τον τύπο της συνάρτησης $3f(x) - 2g(x)$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Β

γ) τον τύπο της συνάρτησης $f(x) \cdot g(x)$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Γ

δ) τον τύπο της συνάρτησης $\frac{f(x)}{g(x)}$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της, Δ

6. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 5x^2 - 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) το $\lim_{x \to 0} f(x)$ και το $\lim_{x \to 0} g(x)$

β) το $\lim_{x \to 0} [f(x) + 2g(x)]$

7. ** Δίνεται η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \frac{3x - 2}{2x + 3}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim_{x \to 1} \varphi(x)$

γ) το $\lim_{x \to 1} [\varphi(x)]^3$

8. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{6x^2 - 2}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, Α

β) το $\lim_{x \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x)$

9. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 6x^3 + 5x - 1$, $g(x) = 2x - 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) τα $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

β) το $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

10. ** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, όταν:

α) $\varphi(x) = 3f(x)$

β) $\varphi(x) = 3f(x) - 2$

γ) $\varphi(x) = \dfrac{5f(x)}{f^3(x) - 2}$

δ) $\varphi(x) = \sqrt{2f^2(x) - 1}$

11. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

12. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3x + 1}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} f(x)$

13. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

14. ** Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + \alpha}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R των πραγματικών αριθμών;

15. ** Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$ η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 4x + (\alpha + 2)}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο R των πραγματικών αριθμών;

16. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 4}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

γ) Να εξετάσετε, αν η f (x) είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$.

17. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \neq 3 \\ \alpha, & x = 3 \end{cases}$.

α) Για $x \neq 3$ είναι συνεχής η συνάρτηση;

β) Για ποια τιμή του $\alpha \in R$ η συνάρτηση f (x) είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$;

18. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \alpha, & x = 2 \end{cases}$. Να βρείτε:

α) το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

β) την τιμή του $\alpha \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

19. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x + x^2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ α, & x = 1 \end{cases}$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της, A

β) το $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{-x + x^2}{x - 1}$

γ) την τιμή του $α \in R$, ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

20. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ α, & x = 2 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του $α \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

21. ** Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι δ. Να εκφράσετε, ως συνάρτηση της διαγωνίου δ:

α) την περίμετρό του β) το εμβαδό του

22. ** Οι κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α = 90°) μεταβάλλονται έτσι ώστε το εμβαδό του να παραμένει σταθερό και ίσο με 12 m^2. Να εκφράσετε το μήκος x της πλευράς ΑΒ, ως συνάρτηση του μήκους y της πλευράς ΑΓ.

23. ** Ένας κυκλικός τομέας ακτίνας r έχει εμβαδό 30 cm^2. Να εκφράσετε την περίμετρό του, ως συνάρτηση της ακτίνας r.

24. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) την $f'(3)$

β) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f, στο σημείο με x = 3

γ) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης

25. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = αx^2$, $x \in R$, $α \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(2, f(2))$ να είναι 4.

26. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 1$, $x \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(0)$.

β) Να προσδιορίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με $x = 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

27. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) την $f'(x)$

β) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

28. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - αx$, $x \in R$, $α \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(2, f(2))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $45°$.

29. ** Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της καμπύλης, που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + x - 3$ στο σημείο $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$.

30. ** Η θέση ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα, δίνεται συναρτήσει του χρόνου από τον τύπο S (t) = $2t + t^2$, όπου το t μετριέται σε sec και το S σε μέτρα. Να βρείτε:

α) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [0, 4] sec

β) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 1 sec (1 sec μετά την εκκίνησή του).

31. ** Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τον τύπο S (t) = $3t^2 - t$. Να βρείτε:

α) τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα [2, 4] sec

β) τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν t = 3 sec (3 sec μετά την εκκίνησή του).

32. ** Η ταχύτητα, ενός κινητού, που κινείται ευθύγραμμα, συναρτήσει του χρόνου t (σε sec), δίνεται από τον τύπο υ (t) = $3t^2 - 5$.

α) Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t, όταν $t = t_0$.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t, όταν t = 10 sec (10 sec μετά την εκκίνησή του).

33. ** Ένας πληθυσμός μικροβίων P μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον τύπο P (t) = $10^3 - 5 \cdot 10^2 (1 + t)^{-1}$.

α) Να βρείτε τον αρχικό αριθμό μικροβίων (t = 0).

β) Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων όταν t = 9 ώρες.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο, όταν t = 9 ώρες.

34. ** Ο πληθυσμός A μιας περιοχής δίνεται, συναρτήσει του χρόνου t (σε έτη) από τον τύπο A (t) = $10 \cdot e^{0{\cdot}04t}$ (σε χιλιάδες). Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού αυτής της περιοχής, ως προς το χρόνο, ύστερα από 25 έτη.

35. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $g(x) = e^x \cdot x^2$. Να βρείτε:

α) Την πρώτη παράγωγο i) της f και ii) της g.

β) Τις παραγώγους i) $f'(1)$ και ii) $g'(1)$.

36. ** Να βρείτε πολυώνυμο P (x) τρίτου βαθμού, τέτοιο ώστε $P(0) = -1$, $P'(1) = 5$, $P'(0) = 2$, $P''(1) = 2$.

37. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x - x^2$.

α) Να βρείτε: i) την $f'(x)$ ii) την $f''(x)$

β) Να αποδειχθεί ότι: $(1 - x) f''(x) + f'(x) = 0$, για κάθε $x \in R$.

38. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{2x}$.

α) Να βρείτε: i) την $f'(x)$ ii) την $f''(x)$

β) Να δείξετε ότι: $2f'(x) - f''(x) = 0$, για κάθε $x \in R$.

39. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Την $f''(x)$

γ) Τις τιμές του α, ώστε να ισχύει η σχέση $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$, για κάθε $x \in R$.

40. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (3x - 2) \cdot \sqrt{(x+1)^3}$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Το $f'(0)$.

41. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, A

β) Την $f'(x)$.

42. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, Α

β) Την $f'(x)$.

43. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1 - ημx}{1 - συνx}$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της, Α

β) Την $f'(x)$.

44. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης, στα οποία οι εφαπτόμενες σ' αυτήν, είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

45. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x + 1)^2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Το συντελεστή διεύθυνσης λ της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με τετμημένη 4.

46. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -x^2 + 3x - 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f, που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 135°.

47. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = α(x + 1)^2$, $x \in R$, $α \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να προσδιορίσετε τον α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(1, f(1))$ να είναι 4.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης ευθείας.

48. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $x \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$

β) Να προσδιορίσετε το σημείο Α της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.

49. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - αx + β$, $α, β \in R$ και η ευθεία $y = 3x - 1$, $x \in R$. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η ευθεία $y = 3x - 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2.

50. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$.

β) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f, που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 3$.

51. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2}{x^2}$, $x \in R$, $x \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι $f'(α) = -\frac{4}{α^3}$ για κάθε $α \in R$, $α \neq 0$.

β) Να προσδιορίσετε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $(α, \frac{2}{α^2})$ της γραφικής παράστασης της f.

52. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$, $x \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία της.

γ) Να προσδιορίσετε τα ακρότατά της (αν υπάρχουν).

53. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$ και $g(x) = 4x - x^2 + 2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) i) την $f'(x)$ και ii) την $g'(x)$.

β) Τις θέσεις για τις οποίες οι συναρτήσεις παρουσιάζουν ακρότατο

γ) Τις τιμές των ακροτάτων αυτών.

54. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 2$, $x \in R$. Να βρείτε:

α) Την $f'(x)$

β) Για ποιες τιμές του x έχουμε $f'(x) = 0$

γ) Ποιες από τις παραπάνω τιμές των x είναι θέσεις ακροτάτων για την f

δ) Τις τιμές των ακροτάτων.

55. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = κx^2 + λx + 3$, $x \in R$, $κ, λ \in R$.

α) Να βρείτε τα κ, λ ώστε η f να έχει στη θέση x = 1 τοπικό ακρότατο ίσο με -2.

β) Τι είδους ακρότατο παρουσιάζει η συνάρτηση στη θέση x = 1;

56. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in R$. Να βρεθούν τα διαστήματα που η f είναι:

α) Αύξουσα

β) Φθίνουσα

57. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

α) Να βρεθούν οι $f'(x)$, $f''(x)$.

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία της.

γ) Να προσδιοριστούν τα ακρότατά της (αν υπάρχουν).

58. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (2x - x^2)\, e^x$, $x \in R$.

α) Να βρεθούν: i) το πεδίο ορισμού της, ii) η $f'(x)$ και η $f''(x)$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς: i) τη μονοτονία της,

ii) τα ακρότατά της και να εντοπιστούν αυτά, αν υπάρχουν.

59. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = κx^3 + λx^2 + 3x - 1$, $x \in R$, $κ, λ \in R$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να προσδιορίσετε τα κ, λ, ώστε η f να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

γ) Να βρείτε τις τιμές των ακροτάτων.

60. ** Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με την ίδια περίμετρο, ποιο είναι εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδό;

61. ** Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με εμβαδό 1600 m^2, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου, που έχει την μικρότερη περίμετρο.

62. ** Να αποδείξετε ότι από όλα τα ισοσκελή τρίγωνα, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R, το ισόπλευρο έχει μεγαλύτερο εμβαδό.

63. ** Να βρεθούν δύο αριθμοί x, y με σταθερό άθροισμα 12, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

64. ** Η τιμή πώλησης ενός μηχανικού εξαρτήματος είναι 1.000 δρχ. Το κόστος του συναρτήσει του χρόνου κατασκευής (σε ώρες) προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$K(t) = t^2 + 250t^{-1}$$

α) Πότε πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος;

β) Πόσο είναι αυτό;

65. ** Η ενέργεια που καταναλώνει ένας μικροοργανισμός που κινείται μέσα στο αίμα ενός ασθενούς με ταχύτητα υ, προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$E(υ) = \frac{1}{υ}\,[2(υ - 35)^2 + 750]$$

α) Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινηθεί για να καταναλώσει τη μικρότερη ενέργεια;

β) Πόση είναι η ελάχιστη ενέργεια;

66. ** Η ενέργεια W (t), που αποδίδεται από ένα πηνίο, μεταβάλλεται με το χρόνο t σύμφωνα με τον τύπο της συνάρτησης:

$$W(t) = 6t^2 - t^4$$

και μετριέται σε Joules.

α) Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ως προς το χρόνο (την ισχύ του πηνίου) τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

β) Σε ποια χρονική στιγμή το πηνίο έχει μέγιστη ισχύ;

γ) Πόσα Watt είναι η μέγιστη ισχύς;

67. ** Η τιμή εισιτηρίου των αστικών λεωφορείων είναι σταθερή τα τελευταία 8 χρόνια στις 100 δρχ. Το κόστος μεταφοράς ανά επιβάτη στη διάρκεια των 8 χρόνων προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$K(t) = t^2 + \frac{250}{t}$$

όπου $t \in (0, 8]$ ο χρόνος.

α) Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος.

β) Πόσο είναι αυτό το κέρδος;

68. ** Η θετική αντίδραση ενός οργανισμού σ’ ένα φάρμακο περιγράφεται (δίνεται) από τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = x^2 (\alpha - x)$, $\alpha > 0$ σταθερά και x η ημερήσια δόση του φαρμάκου σε mg. Ποια είναι η ενδεδειγμένη ποσότητα δόσης του φαρμάκου ώστε να έχουμε τη μεγαλύτερη θετική αντίδραση του οργανισμού;

69. ** Ένα εργοστάσιο ζαχαροπλαστικής παρασκευάζει μεταξύ άλλων ταψάκια γαλακτομπούρεκου. Υπολογίστηκε ότι η παρασκευή x ταψιών την εβδομάδα κοστίζει περίπου $\left(\frac{x^2}{4} + 25x + 25\right)$ δρχ. Αν η τιμή πώλησης του ταψιού είναι $\left(1000 - \frac{x}{2}\right)$ δρχ., πόσα ταψάκια γαλακτομπούρεκο πρέπει να παράγει την εβδομάδα, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος;