ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1ο Κεφάλαιο **ΑΝΑΛΥΣΗ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	**Σ**	**20.**	**Σ**	**39.**	**Λ**
2.	**Λ**	**21.**	**Σ**	**40.**	**Σ**
3.	**Σ**	**22.**	**Σ**	**41.**	**Λ**
4.	**Λ**	**23.**	**Σ**	**42.**	**Σ**
5.	**Σ**	**24.**	**Σ**	**43.**	**Λ**
6.	**Σ**	**25.**	**Λ**	**44.**	**Σ**
7.	**Λ**	**26.**	**Λ**	**45.**	**Λ**
8.	**Σ**	**27.**	**Σ**	**46.**	**Σ**
9.	**Λ**	**28.**	**Σ**	**47. i)**	**Λ**
10.	**Σ**	**29.**	**Σ**	**ii)**	**Σ**
11.	**Λ**	**30.**	**Σ**	**iii)**	**Σ**
12.	**Λ**	**31.**	**Σ**	**iv)**	**Λ**
13.	**Σ**	**32.**	**Σ**	**v)**	**Λ**
14.	**Σ**	**33.**	**Λ**	**vi)**	**Σ**
15.	**Σ**	**34.**	**Σ**	**vii)**	**Λ**
16.	**Σ**	**35.**	**Σ**	**viii)**	**Σ**
17.	**Σ**	**36.**	**Σ**	**ix)**	**Σ**
18.	**Σ**	**37.**	**Λ**	**x)**	**Λ**
19.	**Λ**	**38.**	**Σ**		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Α
2.	Β
3.	Β
4.	Β
5.	Γ
6.	Α
7.	Γ
8.	Α
9.	Β
10.	Γ

11.	Δ
12.	Β
13.	Γ
14.	Γ
15.	Γ
16.	Β
17.	Α
18.	Ε
19.	Γ

20.	Α
21.	Γ
22.	Δ
23.	Δ
24.	Γ
25.	Γ
26.	Δ
27.	Γ
28.	Ε

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$f(x) = 2x$	R
$f(x) = \frac{3}{x-1}$	$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x-1}$	$[1, \infty)$
$f(x) = \frac{2x}{x+1}$	$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

2.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt{x+2}$	$[-2, +\infty)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$	$(-2, +\infty)$

3.

1	Α
2	Β
3	Γ

4.

1	Α
2	Δ
3	Γ

5.

1	Β
2	Γ

6.

1	Α
2	Γ

7.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄ (x)***
$3x^2$	$6x$
$3x$	3
$2\,(x^2 - 1)$	$4x$
$(3x)^2$	$18x$
$(3x - 1)^2$	$6\,(3x - 1)$
$3x^2 - x$	$6x - 1$

8.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄ (x)***
α	0
αx	Α
$\beta x + \alpha$	Β
$\alpha x^2 + \beta$	$2\alpha x$
βx^2	$2\beta x$
$\alpha x^2 - \beta x$	$2\alpha x - \beta$
$\beta x^2 + \alpha x + \gamma$	$2\beta x + \alpha$

9.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
$(c\, f(x))' =$	$c\, f'(x)$
$(f(x) + g(x))' =$	$f'(x) + g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' =$	$f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$	$\dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$
$[f(g(x))]' =$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης - σύντομης απάντησης

1. α) $f(x) = \sqrt{x^2}$ $\quad A = R$

β) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad A = R - \{0\}$

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad A = R$

δ) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\quad A = R$

ε) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad A = R$

2. α) $g(x) = 3f(x) - 1$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -7$

β) $g(x) = 2 - 4f(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 10$

γ) $g(x) = (2f(x))^2$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 16$

δ) $g(x) = \dfrac{2f(x)-1}{5-3f(x)}$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\dfrac{5}{11}$

ε) $g(x) = \sqrt[3]{-8f(x)+11}$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 3$

3. α) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 6x - 1) = 7$

β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+1}{3x} = \dfrac{5}{6}$

γ) $\lim\limits_{x \to 3} (5\sqrt{6x-1}) = 5\sqrt{17}$

δ) $\lim\limits_{x \to -1} [(3x+2)(5x-3)]^2 = 64$

ε) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} [\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x] = 1$

στ) $\lim\limits_{x \to 0} [2\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x] = -4$

4. α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \dfrac{1}{2}$

β) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = -\dfrac{8}{3}$

γ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2(x+1)} = \dfrac{1}{2}$

δ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5} = -\dfrac{1}{2}$

5. α) $f'(0) = 0$

β) $f'(1) = 2$

γ) $f'(-1) = -4$

δ) $f'(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

ε) $f'(0) = 0$

6. α) $y = -1$

β) $y = 4x - 3$

γ) $y = -6x - 5$

8.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$x - 1$	1
$(x - 1)^2$	$2\,(x - 1)$
$(x^2 - 1)^2$	$4x\,(x^2 - 1)$
$(x - 1)^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}\,(x - 1)^{-\frac{1}{3}}$
$\frac{1}{(x-1)^2}$	$\frac{-2}{(x-1)^3}$
$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$	$-\frac{1}{2}\,(x - 1)^{-\frac{3}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}$	$-\frac{3}{2}\,(x - 1)^{-\frac{5}{2}}$

9.

Στήλη Α $f\ (x)$	Στήλη Β $f\,'(x)$
$\sqrt{\eta\mu x}$	$\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu x}}$
$\sqrt{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$	$\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{2\sqrt{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}}$
$x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$	$1 + \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$
$\dfrac{x}{\sqrt{\eta\mu x}}$	$\dfrac{2\sqrt{\eta\mu^2 x} - x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu^3 x}}$
$\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{2\sqrt{x^2}\,\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{2\sqrt{x^3}}$

10.

Στήλη Α $f\ (x)$	Στήλη Β $f\,'(x)$
$x - \ln x$	$1 - \dfrac{1}{x}$
$x \cdot e^{\frac{1}{x}}$	$e^{\frac{1}{x}}\ (1 - \dfrac{1}{x})$
e^{-2x^3+1}	$- 6x^2 \cdot e^{-2x^3+1}$
$\ln \sqrt{x^2 - 2}$	$\dfrac{x}{x^2 - 2}$

11.

Στήλη Α	**Στήλη Β** *πεδίο ορισμού*	**Στήλη Γ** *α΄ παράγωγος*	**Στήλη Δ** *β΄ παράγωγος*
$h(x) = \frac{1}{x^2}$	R - {0}	$-\frac{2}{x^3}$	$\frac{6}{x^4}$
$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$	R - {- 1, 1}	$-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$	$\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$
$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$	R	$\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$
$g(x) = \frac{x-1}{x^2}$	R - {0}	$\frac{2-x}{x^3}$	$\frac{2(x-3)}{x^4}$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** $A = R$ **β)** $x = 1, x = 2$ **γ)** $B = R - \{1, 2\}$

2. **α)** Δεν υπάρχουν $x \in R : g(x) = 0$

β) $A = R$ **γ)** $B = R$

3. **α)** $x = \pm 1$ **β)** $g(x) > 0$ όταν $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

γ) **i)** Με $x^2 - 1 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{-1, 1\}$

ii) Με $x^2 - 1 \geq 0$ έχουμε $B = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

iii) Με $x^2 - 1 > 0$ έχουμε $\Gamma = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

4. **α)** $x = 4$ **β)** Με $x - 4 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{4\}$

5. **α)** $f(x) + g(x) = x^2 - x - 4$ $A = R$

β) $3f(x) - 2g(x) = 3x^2 - 18x - 2$ $B = R$

γ) $f(x) \cdot g(x) = 3x^3 - 14x^2 + 2x + 4$ $\Gamma = R$

δ) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 4x - 2}{3x - 2}$ Με $3x - 2 \neq 0$ έχουμε $\Delta = R - \{\dfrac{2}{3}\}$

6. **α)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -1$ **β)** $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + 2g(x)] = -1$

7. **α)** Με $2x + 3 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{-\frac{3}{2}\}$

β) $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = \frac{1}{5}$

γ) $\lim\limits_{x \to 1} [\varphi(x)]^3 = \frac{1}{125}$

8. **α)** Με $6x^2 - 2 \geq 0$ έχουμε $A = (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

β) $\lim\limits_{x \to -\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x) = 0$

9. **α)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -12$, $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -3$ **β)** $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)}{g(x)} = 4$

10. **α)** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = -6$ **β)** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = -8$

γ) $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$ **δ)** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \sqrt{7}$

11. **α)** Με $x + 2 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{-2\}$

β) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to -2} (x + 2) = -4$

12. **α)** Με $3x + 1 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{-\frac{1}{3}\}$

β) $$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{3x + 1} = \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{(3x+1)(3x-1)}{3x+1} = \lim_{x \to -\frac{1}{3}} (3x - 1) = -2$$

13. **α)** Με $x - 3 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{3\}$

β) $$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{3}^2} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

14. Πρέπει $x^2 + \alpha \neq 0$ άρα η διακρίνουσα $\Delta < 0$

δηλ. $-4\alpha < 0$, άρα $\alpha > 0$ ή $\alpha \in (0, +\infty)$

15. Πρέπει $x^2 - 4x + (\alpha + 2) \neq 0$ άρα πρέπει $\Delta < 0$

δηλ. $16 - 4(\alpha + 2) < 0$, ..., άρα $\alpha > 2$

16. **α)** Με $x + 4 \neq 0$ έχουμε $A = R - \{-4\}$

β) $\lim_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{5}$

γ) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{x + 4} = \frac{-1}{5} = f(1)$. Άρα η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$.

17. **α)** Για $x \neq 3$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής, ως πολυωνυμική.

β) Πρέπει $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, δηλ. $\lim_{x \to 3} (x^2 - 3x + 2) = f(3) = \alpha$, άρα $\alpha = 2$

18. **α)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3$

β) Πρέπει $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = α$, άρα $α = 3$

19. **α)** $A = R$ **β)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)}{x-1} = 1$

γ) Πρέπει $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = α$, άρα $α = 1$

20. Πρέπει $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = α$ (1)

Όμως $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-3)(x-2)}{x-2} = -1$ (2)

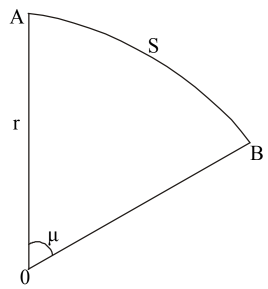
Άρα από (1) και (2) έχουμε $α = -1$

21. **α)** $Π(δ) = 2\sqrt{2}\,δ$ **β)** $E(δ) = \dfrac{δ^2}{2}$

22. Αν x, y οι κάθετες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ τότε $E_{ABΓ} = \dfrac{x \cdot y}{2} = 12$.

Άρα $x(y) = \dfrac{24}{y}$.

23. Έστω Π (r) η περίμετρος του κυκλικού τομέα, τότε Π (r) = 2 r + S   (1)



Όμως $E_{0AB} = \dfrac{\pi r^2 \mu}{360°} = 30$. Άρα $\mu = \dfrac{30 \cdot 360°}{\pi r^2}$ (2)

Αλλά $S = \dfrac{2\pi r \mu}{360°}$. Άρα από (2) έχουμε

$$S = \frac{2\pi r \dfrac{30 \cdot 360°}{\pi r^2}}{360°} = \frac{2 \cdot 30}{r} = \frac{60}{r} \qquad (3)$$

Από (1) και (3) έχουμε $\Pi(r) = 2r + \dfrac{60}{r}$

24. **α)** f ΄ (3) = 2

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f στο σημείο με x = 3 ισούται με το f ΄ (3), δηλ. είναι 2

γ) Η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης θα είναι της μορφής y = αx + β, άρα y = 2x + β. Το σημείο (3, f (3)) = (3, 3) είναι κοινό σημείο της καμπύλης της f και της εφαπτομένης, άρα έχουμε: 3 = 2 · 3 + β, άρα β = -3 και η ζητούμενη εξίσωση είναι y = 2x - 3

25. **α)** f ΄ (2) = 4α   **β)** Πρέπει f ΄ (2) = 4 , δηλ. f ΄ (2) = 4α = 4 , άρα α = 1

26. **α)** f ΄ (0) = 0

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο με x = 0 ισούται με το f ΄ (0) , δηλ. f ΄ (0) = 0

γ) Με όμοιο τρόπο, με τη λύση της άσκησης 24 (γ) βρίσκουμε y = 1

27. **α)** $f'(x) = 2x - 5$

β) Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = αx + β$ (1)

Επειδή η εφαπτομένη είναι παράλληλη του άξονα των $x'x$ θα είναι $α = 0$ και άρα η (1) γίνεται $y = β$ (2)

Η ευθεία (2) εφάπτεται της καμπύλης της f στο σημείο της κορυφής της δηλ. στο σημείο $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

Το σημείο αυτό ανήκει και στην ευθεία $y = β$, άρα έχουμε $-\frac{1}{4} = β$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -\frac{1}{4}$

28. **α)** $f'(2) = 8 - α$

β) Πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(2, f(2))$ να ισούται με την εφαπτομένη 45°, δηλ. με 1, άρα $f'(2) = 8 - α = 1$, άρα $α = 7$

29. Έστω $\hat{ω}$ η ζητούμενη γωνία, τότε $εφω = f'(\frac{1}{4})$. Άρα $εφω = -4\frac{1}{4} + 1 = 0$.

Άρα $\hat{ω} = 0°$

30. **α)** Η μέση ταχύτητα $\overline{υ}(t) = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{S(4) - S(0)}{4 - 0} =$

$\frac{S(4)}{4} = \frac{24}{4} = 6$ m/sec

β) Η στιγμιαία ταχύτητα $υ(t) = S'(t) = 2 + 2t$. Άρα η στιγμιαία ταχύτητα για $t = 1$ είναι $S'(1) = 2 + 2·1 = 4$ m/sec.

31. Όμοια με την προηγούμενη άσκηση 30 βρίσκουμε:

α) $\overline{\upsilon}$ = 17 m/sec **β)** υ = 17 m/sec, όταν t = 3 sec

32. **α)** Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ (t) ως προς t όταν $t = t_0$ είναι
$\gamma(t_0) = \upsilon'(t_0) = 6t_0$ m/sec^2

β) Όταν t = 10 sec τότε $\gamma(10) = 6 \cdot 10 = 60$ m/sec^2

33. **α)** $P(0) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1 + 0)^{-1} = 1000 - 500 = 500$ μονάδες μικροβίων

β) $P(9) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1 + 9)^{-1} = 1000 - 500 \dfrac{1}{10} = 950$ μονάδες μικροβίων

γ) Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο όταν t = 9 h ,είναι $P'(9) = 5$ μονάδες ανά ώρα

34. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ύστερα από 25 χρόνια θα είναι
$A'(25) = 1.080$ κάτοικοι ανά έτος. ($e \approx 2{,}7$)

35. **α)** i) $f'(x) = e^{-x} \cdot x^2 (3 - x)$ ii) $g'(x) = e^{x} \cdot x (2 + x)$

β) i) $f'(1) = \dfrac{2}{e}$ ii) $g'(1) = 3e$

36. Έστω $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

$P(0) = \delta = -1$ (1)

$P'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$

άρα $P'(1) = 3\alpha \cdot 1^2 + 2\beta \cdot 1 + \gamma = 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5$ (2)

$P'(0) = \gamma = 2$ (3)

$P''(x) = 6\alpha x + 2\beta$ άρα $P''(1) = 6\alpha + 2\beta = 2$ (4)

Από το σύστημα των (1) (2) (3) (4) προκύπτει $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-\dfrac{1}{3}, 2, 2, -1)$

δηλ. $P(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x - 1$

37. **α)** **i)** $f'(x) = 2 - 2x$ **ii)** $f''(x) = -2$

38. **α)** **i)** $f'(x) = 2e^{2x}$ **ii)** $f''(x) = 4e^{2x}$

39. **α)** $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ **β)** $f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$ **γ)** $\alpha = -3, \ \alpha = 1$

40. **α)** $f'(x) = 3\sqrt{x+1}\left[\,|x+1| + \dfrac{3x-2}{2}\right]$ **β)** $f'(0) = 0$

41. **α)** Είναι $e^x + 1 \neq 0$, για όλες τις πραγματικές τιμές του x, άρα $A = R$

β) $f'(x) = \dfrac{2 \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}$

42. **α)** Πρέπει $e^x - 1 \neq 0$, άρα $x \neq 0$, άρα $A = R - \{0\}$

β) $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$

43. **α)** Πρέπει $1 - \sigma\upsilon\nu x \neq 0$,άρα $\sigma\upsilon\nu x \neq 1$, άρα $x \neq 2\kappa\pi$

Άρα $A = \{x \,/\, x \neq 2\kappa\pi, \ \kappa \in Z\}$

β) $f'(x) = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)^2}$

44. **α)** $f'(x) = x^2 + 4x + 3$

β) Οι εφαπτόμενες της καμπύλης της f στα ζητούμενα σημεία είναι παράλληλες προς τον xx΄, άρα σχηματίζουν γωνία 0° με αυτόν.

Άρα εφ0° = 0 = $f'(x)$.Δηλαδή $f'(x)= x^2 + 2x + 3 = 0$, από όπου $x_1 = -1$, $x_2 = -3$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι **Α** $(-1, -\frac{1}{3})$, **Β** $(-3, 1)$

45. **α)** $f'(x) = 2(x + 1)$

β) $\lambda = f'(4)$, άρα $\lambda = 10$

46. **α)** $f'(x) = -2x + 3$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $y = \alpha x + \beta$ (1)

Πρέπει να βρεθούν τα α, β.

α = εφ135° = - εφ45° = - 1 (2)

Άρα έχουμε: $\alpha = -1 = f'(x) = -2x + 3$, άρα $x = 2$.

Το σημείο επαφής έχει συντεταγμένες $(2, f(2)) = (2, 1)$ (3)

Άρα η (1) λόγω των (2) (3) γίνεται: $1 = -1 \cdot 2 + \beta$, άρα $\beta = 3$.

Άρα $y = -x + 3$

47. **α)** $f'(x) = 2\alpha(x + 1)$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda = f'(1) = 4$, άρα $f'(1) = 2\alpha 2 = 4$, άρα $\alpha = 1$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = \kappa x + \lambda$. Αλλά από (β) ερώτημα έχουμε $\kappa = 4$, άρα πρέπει να βρεθεί το λ.

Το σημείο $(1, f'(1)) = (1, 4)$ είναι κοινό σημείο της f και της εφαπτομένης $y = \kappa x + \lambda$ (1).

Άρα από (1) έχουμε: $4 = 4 \cdot 1 + \lambda$, άρα $\lambda = 0$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = 4x$

48. **α)** $f'(x) = 2x - 4$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Α (x, y) ισούται με 1 (εφ45° = 1). Άρα $f'(x) = 1$

Δηλαδή έχουμε $f'(x) = 2x - 4 = 1$, άρα $x = \frac{5}{2}$ και $f(\frac{5}{2}) = -\frac{7}{4}$.

Άρα το σημείο Α έχει συντεταγμένες $(x, y) = (\frac{5}{2}, -\frac{7}{4})$

49. Για να είναι η ευθεία $y = 3x - 1$ εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο (2, f (2)), πρέπει:

1) $f'(2) = 3$, δηλαδή

$4 \cdot 2 - \alpha = 3$

$\alpha = 5$

2) Το σημείο (2, f (2)) να είναι κοινό σημείο της καμπύλης της f και της εφαπτομένης ευθείας $y = 3x - 1$, δηλαδή:

$f(2) = 3 \cdot 2 - 1$

$2 \cdot 2^2 - \alpha \cdot 2 + \beta = 3 \cdot 2 - 1$

$8 - 5 \cdot 2 + \beta = 3 \cdot 2 - 1$

$-2 + \beta = 5$

$\beta = 7$

50. **α)** $f'(x) = x^2 + 2x - 2$

β) Οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της καμπύλης της f , που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = x + 3$ θα είναι $y = x + \beta$ και $y = x + \gamma$. Αρκεί να βρεθούν οι παράμετροι β, γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης των $y = x + \beta$ και

$y = x + \gamma$ είναι ίσος με $1 = f'(x)$. Δηλαδή $f'(x) = x^2 + 2x - 2 = 1$ απ' όπου $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Τα σημεία (1, f (1)), (- 3, f (- 3)) είναι κοινά σημεία επαφής της καμπύλης της f και των αντιστοίχων εφαπτόμενων.

Άρα: $f(1) = 1 + \beta$ και $\quad f(-3) = -3 + \gamma$

$\frac{1}{3} = 1 + \beta \qquad 7 = -3 + \gamma$, άρα

$\beta = -\frac{2}{3} \qquad \gamma = 10$

Άρα οι ζητούμενες εξισώσεις είναι $y = x - \frac{2}{3}$, $y = x + 10$

51. **α)** $f'(x) = -\frac{4}{x^3}$ άρα $f'(\alpha) = -\frac{4}{\alpha^3}$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $(\alpha, \frac{2}{\alpha^2})$ είναι της μορφής

$y = \kappa x + \lambda$ (1), όπου ο κ ισούται με $f'(\alpha) = -\frac{4}{\alpha^3}$ (2)

Το σημείο $(\alpha, \frac{2}{\alpha^2})$ είναι κοινό σημείο της καμπύλης της f και της

$y = \kappa x + \lambda$. Άρα από (1), (2) έχουμε $\frac{2}{\alpha^2} = -\frac{4}{\alpha^3} \cdot \alpha + \lambda$.

Άρα $\frac{2}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^2} = \lambda$. Άρα $\frac{6}{\alpha^2} = \lambda$ (3)

Από (1), (2), (3) έχουμε $y = -\frac{4}{\alpha^3} x + \frac{6}{\alpha^2}$

52. **α)** $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x - 5)(x - 1)$

β) Από τον παρακάτω πίνακα (μεταβολών της συνάρτησης)

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

προκύπτει ότι η f είναι στο $(-\infty, 1]$ αύξουσα, στο $[1, 5]$ φθίνουσα και στο $[5, +\infty)$ αύξουσα

γ) Για $x = 1$, η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή $f_{max} = 4$ και για $x = 5$ η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $f_{min} = -28$

53. **α)** i) $f'(x) = 4x - 4$ ii) $g'(x) = -2x + 4$

β) Από τους παρακάτω πίνακες (μεταβολών των συναρτήσεων)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	

έχουμε ότι η συνάρτηση f για $x = 1$ παρουσιάζει ελάχιστο και η συνάρτηση g για $x = 2$ παρουσιάζει μέγιστο.

γ) Για $x = 1$, το $f(1) = -3$ είναι ελάχιστο

Για $x = 2$, το $g(2) = 6$ είναι μέγιστο

54. **α)** $f'(x) = x^2 - 4x - 5$ **β)** $x_1 = 5$, $x_2 = -1$

γ) Από τον παρακάτω πίνακα (μεταβολών της συνάρτησης)

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

έχουμε ότι για $x = -1$ η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο και για $x = 5$ η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο

δ) Για $x = -1$, το $f(-1) = \frac{2}{3}$ είναι μέγιστο

Για $x = 5$, το $f(5) = -\frac{106}{3}$ είναι ελάχιστο

55. α) Για να έχει η συνάρτηση f τοπικό ακρότατο για $x = 1$,

θα πρέπει $f\,'(1) = 0$.

$f\,'(x) = 2\kappa x + \lambda$. Άρα $f\,'(1) = 2\kappa + \lambda = 0$ (1)

Επίσης το $f(1) = -2$ δηλαδή $f(1) = \kappa + \lambda + 3 = -2$ (2)

Από (1) και (2) σχέσεις έχουμε $\kappa = 5$, $\lambda = -10$. Άρα $f(x) = 5x^2 - 10x + 3$

και $f\,'(x) = 10x - 10$

β) Η συνάρτηση f για $x = 1$ παρουσιάζει ελάχιστο, αφού για $x < 1$

η $f\,'(x) < 0$ και για $x > 1$ η $f\,'(x) > 0$.

56. Από τη συνάρτηση f έχουμε $f\,'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$

Από τον παρακάτω πίνακα (μεταβολών της f) έχουμε

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f\,'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

α) Η συνάρτηση f είναι αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$

β) Η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$

57. α) $f\,'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$ $\qquad f\,''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

β) Από τον παρακάτω πίνακα (μεταβολών της f) έχουμε

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f\,'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$

και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$

γ) Για $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $f(0)$

Για $x = 2$ παρουσιάζει μέγιστο ίσο με $f(2)$

58. **α)** **i)** A = R **ii)** $f'(x) = e^x(-x^2 + 2)$, $f''(x) = e^x(-x^2 - 2x + 2)$

β) Από τον παρακάτω πίνακα (μεταβολών της f) έχουμε

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

i) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

ii) Για $x = \sqrt{2}$ έχουμε μέγιστο με τιμή μεγίστου την $f(\sqrt{2}) = 3,4$

Για $x = -\sqrt{2}$ έχουμε ελάχιστο με τιμή ελαχίστου την $f(-\sqrt{2}) = -1{,}174$

59. **α)** $f'(x) = 3\kappa x^2 + 2\lambda x + 3$

β) Για να έχει η συνάρτηση f τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ πρέπει $f'(2) = 0$, $f'(-2) = 0$

Άρα $3\kappa \cdot 2^2 + 2\lambda \cdot 2 + 3 = 0$ και $3\kappa(-2)^2 + 2\lambda(-2) + 3 = 0$ ή

$12\kappa + 4\lambda + 3 = 0 \quad (1)$

$12\kappa - 4\lambda + 3 = 0 \quad (2)$

Από (1) και (2) προκύπτει $\kappa = -\dfrac{1}{4}$, $\lambda = 0$

γ) Η συνάρτηση f μετά τον προσδιορισμό των κ, λ γίνεται

$f(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + 3x - 1$

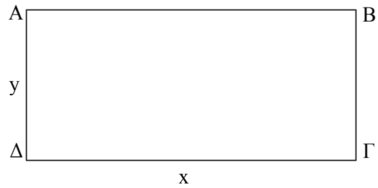
Για $x = 2$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(2) = 3$

Για $x = -2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-2) = -5$

60. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με σταθερή περίμετρο Π και διαστάσεις

x, y. Άρα $2x + 2y = \Pi$ ή $2y = \Pi - 2x$ ή $y = \dfrac{\Pi - 2x}{2}$ (1) $x, y > 0$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου εκφράζεται συναρτήσει του x από τη συνάρτηση



$$E(x) = x\left(\frac{\Pi - 2x}{2}\right) = \frac{x\Pi}{2} - x^2,$$

$0 < x < \dfrac{\Pi}{2}$.

Θα υπολογίσουμε την τιμή του x, ώστε η Ε (x) να έχει μέγιστο. Η Ε (x) είναι παραγωγίσιμη με $E'(x) = \dfrac{\Pi}{2} - 2x$. Η $E'(x)$ μηδενίζεται όταν $x = \dfrac{\Pi}{4}$.

Από τον πίνακα:

x	0		$\frac{\Pi}{4}$		$\frac{\Pi}{2}$
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$		↗	max	↘	

έχουμε ότι η συνάρτηση Ε (x) έχει μέγιστη τιμή όταν $x = \dfrac{\Pi}{4}$. Άρα από την (1) για $x = \dfrac{\Pi}{4}$, έχουμε $y = \dfrac{\Pi}{4}$.

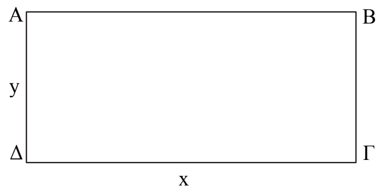
Άρα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει μέγιστο εμβαδόν, όταν $x = y = \dfrac{\Pi}{4}$, δηλαδή όταν είναι τετράγωνο.

61. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x, y και εμβαδό 1600 m^2.

Δηλαδή $x \cdot y = 1600\ m^2$ ή $y = \dfrac{1600}{x}$ (1) x, y > 0

Η περίμετρος του γράφεται 2 (x + y) και εκφράζεται συναρτήσει του x ως εξής:

$\Pi(x) = 2\left(x + \dfrac{1600}{x}\right),\ x > 0$



Θα υπολογίσουμε την τιμή του x, ώστε η Π (x) να έχει ελάχιστο. Η συνάρτηση Π (x) είναι παραγωγίσιμη με $\Pi'(x) = \dfrac{x^2 - 1600}{x^2}$ και με Π ΄ (x) = 0

έχουμε x = 40 (x > 0)

Από τον πίνακα:

x	0		40		+∞
Π ΄(x)		−	0	+	
Π (x)		↘	min	↗	

έχουμε ότι η Π (x) έχει για x = 40 ελάχιστη τιμή ίση με Π (40).

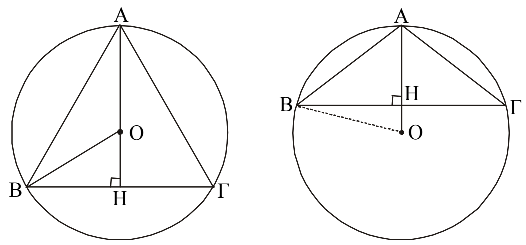
Αν x = 40, από την (1) έχουμε y = 40 , δηλαδή το ζητούμενο ορθογώνιο είναι το τετράγωνο με πλευρά x = y = 40 m.

62. Έστω ΑΒΓ το ισοσκελές τρίγωνο (ΑΒ = ΑΓ) και ΑΗ το ύψος του.

Το περίκεντρο του ΑΒΓ βρίσκεται στην ευθεία ΑΗ.

Αν θέσουμε ΑΗ = x με $0 < x < 2R$, τότε ΟΗ = x - R ή ΟΗ = R – x, δηλαδή

$OH = |x - R|$



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΗΒ έχουμε

$BH^2 = OB^2 - OH^2$

Δηλαδή ΒΗ = $\sqrt{R^2 - |x - R|^2} = \sqrt{R^2 - x^2 - R^2 + 2Rx} = \sqrt{2Rx - x^2}$, οπότε

το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι Ε (x) = $\frac{1}{2}$ ΒΓ · ΑΗ = $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2Rx - x^2} \cdot x$

Άρα Ε (x) = x· $\sqrt{2Rx - x^2}$ (1). Η (1) είναι παραγωγίσιμη με

Ε ΄ (x) = (x· $\sqrt{2Rx - x^2}$) ΄ = $\frac{3Rx - 2x^2}{\sqrt{2Rx - x^2}}$ και με Ε ΄ (x) = 0 έχουμε

$3Rx - 2x^2 = 0$ άρα x = 0, x = $\frac{3R}{2}$ και με x ∈ (0, 2R) και x ≠ 0 έχουμε

x = $\frac{3R}{2}$

Από τον πίνακα:

x	0		$\frac{3R}{2}$		2R
Ε ΄(x)		+	0	−	
Ε (x)		↗	max	↘	

έχουμε ότι η συνάρτηση Ε (x) παρουσιάζει μέγιστο για x = $\frac{3R}{2}$.

Το εμβαδόν λοιπόν γίνεται μέγιστο για x = $\frac{3R}{2}$. Τότε ΟΗ= $\left|\frac{3R}{2} - R\right| = \frac{R}{2}$. Το απόστημα της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι $\frac{R}{2}$, άρα είναι ισόπλευρο τρίγωνο, του οποίου το εμβαδόν είναι $E\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

63. Οι δύο αριθμοί x, y έχουν σταθερό άθροισμα 12, άρα x + y = 12 και y = 12 - x (1)

Το γινόμενό τους συναρτήσει του x είναι Γ (x) = x · (12 - x) = $12x - x^2$.

Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη, με Γ ΄ (x) = 12 - 2x . Αν Γ ΄ (x) = 0 έχουμε x = 6.

Από τον πίνακα

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$\Gamma\,'(x)$		$+$	0	$-$	
$\Gamma\,(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

έχουμε ότι η συνάρτηση Γ (x) παρουσιάζει μέγιστο για $x = 6$ και η τιμή του είναι $\Gamma\,(6) = 36$. Για $x = 6$ από την (1) έχουμε $y = 6$. Άρα οι δύο αριθμοί είναι $x = y = 6$.

64. **α)** Η συνάρτηση κόστους $K\,(t) = t^2 + 250t^{-1}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με $K\,'\,(t) = 2t - 250t^{-2}$. Η πραγματοποίηση μεγίστου κέρδους συνεπάγεται την ελαχιστοποίηση του κόστους κατασκευής.

Από $K\,'\,(t) = 0$ έχουμε:

$$2t - 250t^{-2} = 0 \;\text{ ή }\; \frac{2t^3 - 250}{t^2} = 0 \;\text{ ή }\; t^3 = 125 \;\text{ ή }\; t = 5.$$

Από τον πίνακα

t	0		5		$+\infty$
$K\,'(t)$		$-$	0	$+$	
$K\,(t)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

προκύπτει ότι η συνάρτηση K (t) παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $t = 5$ h και αυτή είναι $K\,(5) = 75$ δρχ.

Άρα το μέγιστο κέρδος πραγματοποιείται για $t = 5$ h.

β) Το μέγιστο κέρδος είναι $1000 - 75 = 925$ δρχ.

65. α) Η συνάρτηση $E(\upsilon) = \frac{1}{\upsilon}\left[2(\upsilon - 35)^2 + 750\right]$

είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο

$$E'(\upsilon) = \frac{\left[2(\upsilon - 35)^2 + 750\right]' \cdot \upsilon - \left[2(\upsilon - 35)^2 + 750\right] \cdot \upsilon'}{\upsilon^2} =$$

$$= \frac{4(\upsilon - 35) \cdot \upsilon - \left[2(\upsilon - 35)^2 + 750\right]}{\upsilon^2} =$$

$$= \frac{4\upsilon^2 - 140\upsilon - \left[2(\upsilon^2 - 70\upsilon + 1225) + 750\right]}{\upsilon^2} =$$

$$= \frac{2\upsilon^2 - 3200}{\upsilon^2}.$$

Αν $E'(\upsilon) = 0$ έχουμε $\upsilon = 40$.

Από τον πίνακα

υ	0		40		$+\infty$
$E'(\upsilon)$		$-$	0	$+$	
$E(\upsilon)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

έχουμε ότι η συνάρτηση $E(\upsilon)$ παρουσιάζει ελάχιστο για την τιμή $\upsilon = 40$ μονάδες ταχύτητας.

β) Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι:

$E_{min}(40) = 20$ μονάδες ενέργειας

66. **α)** $P(t_0) = W'(t_0) = 12t_0 - 4t_0^3$.

β) Η συνάρτηση P (t) εκφράζει την ισχύ του πηνίου και είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $P'(t) = 12 - 12t^2$.

Αν $P'(t) = 0$ έχουμε $t = \pm 1$.

Απορρίπτουμε την αρνητική τιμή του χρόνου $t = -1$ και με $t = 1$ έχουμε τον παρακάτω πίνακα

t	0		1		+∞
P ′ (t)		+	0	−	
P (t)		↗	max	↘	

απ' όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση ισχύος του πηνίου P (t) παρουσιάζει μέγιστο για t = 1 h.

γ) Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης P (t) που εκφράζει τη μέγιστη ισχύ του πηνίου είναι P (1) = 8 Watt.

67. **α)** Η συνάρτηση κέρδους είναι $A(t) = 100 - t^2 - \dfrac{250}{t}$, $t \in (0, 8]$

Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$A'(t) = -2t + \dfrac{250}{t^2}$.

Αν $A'(t) = 0$ έχουμε $\dfrac{-2t^3 + 250}{t^2} = 0$ ή $2t^3 = 250$ ή $t^3 = 125$ ή $t = 5$.

Από τον παρακάτω πίνακα

t	0		5		8
A ′ (t)		+	0	−	
A (t)		↗	max	↘	

έχουμε ότι για t = 5 χρόνια η συνάρτηση A (t) παρουσιάζει μέγιστο.

β) Το μέγιστο κέρδος ανά επιβάτη είναι A (5) = 25 δρχ.

68. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 (\alpha - x)$, με α θετική σταθερά, είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x) = 2\alpha x - 3x^2$. Αν $f'(x) = 0$ έχουμε $2\alpha x - 3x^2 = 0$ ή $x = 0$, $x = \frac{2\alpha}{3}$.

Η ρίζα x = 0 απορρίπτεται γιατί αναφέρεται σε μηδενική ποσότητα φαρμάκου.

Από τον παρακάτω πίνακα

x	0		$\frac{2\alpha}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

έχουμε ότι για $x = \frac{2\alpha}{3}$ η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο.

Άρα για $x = \frac{2\alpha}{3}$ ποσότητα φαρμάκου έχουμε τη μέγιστη θετική αντίδραση του οργανισμού.

69. Η συνάρτηση κόστους των x ταψιών είναι $K(x) = \frac{x^2}{4} + 25x + 25$.

Η συνάρτηση εσόδων από την πώληση των x ταψιών είναι

$\Pi(x) = x\left(1000 - \frac{x}{2}\right)$.

Άρα η συνάρτηση κέρδους των x ταψιών είναι

$A(x) = x\left(1000 - \frac{x}{2}\right) - \left(\frac{x^2}{4} + 25x + 25\right)$ ή $A(x) = -\frac{3x^2}{4} + 975x - 25$

Η συνάρτηση $A(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $A'(x) = -\frac{6x}{4} + 975$.

Αν $A'(x) = 0$ έχουμε $x = 650$.

Από τον παρακάτω πίνακα

x	0		650		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

έχουμε ότι η συνάρτηση $A(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 650$.

Άρα έχουμε το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος όταν παραχθούν 650 ταψάκια.