

30.

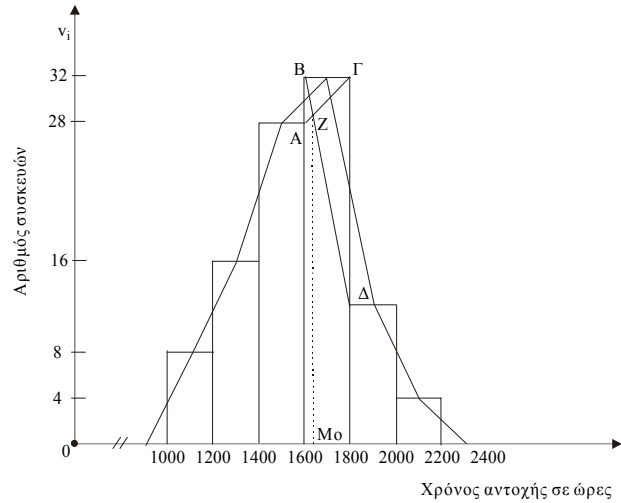
Αποδοχές σε χιλιάδες δρχ.	Κεντρικές τιμές x_i	v_i	x_i^2	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
[30, 35)	32,5	8	1056,25	260	8450
[35, 40)	37,5	10	1406,25	375	14062,5
[40, 45)	42,5	16	1806,25	680	28900
[45, 50)	47,5	15	2256,25	712,5	33843,75
[50, 55)	52,5	10	2756,25	525	27562,5
[55, 60)	57,5	8	3306,25	460	26450
[60, 65)	62,5	3	3906,25	187,5	11718,75
ΣΥΝΟΛΑ		70		3200	150987,5

β) i) $\bar{x} \approx 46$ χιλ. ii) $s^2 = 67$ iii) $s \approx 8,5$ iv) $CV = 17,39\%$

31. α)

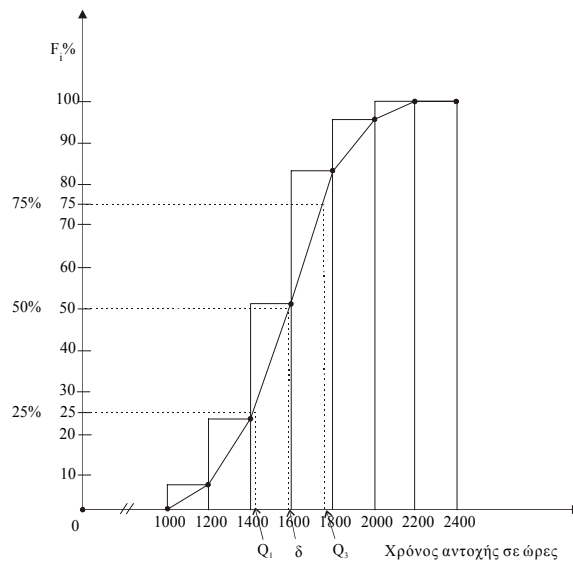
Χρόνος αντοχής σε ώρες	Αριθμός συσκευών	$f_i \%$	$F_i \%$
[1000, 1200)	8	8	8
[1200, 1400)	16	16	24
[1400, 1600)	28	28	52
[1600, 1800)	32	32	84
[1800, 2000)	12	12	96
[2000, 2200)	4	4	100
[2200, 2400)	0	0	0
ΣΥΝΟΛΑ	100	100	

β) i)



ii) Η επικρατούσα τιμή είναι η τετμημένη του σημείου τομής Z των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Κατά προσέγγιση είναι $M_0 \approx 1630$ αφού έχουμε υποθέσει ότι οι παρατηρήσεις στις κλάσεις κατανέμονται ομοιόμορφα.

γ) i)



ii) $\delta \approx 1580$

iii) $Q_1 \approx 1420$, $Q_3 \approx 1740$

δ) 52 είναι οι συσκευές που έχουν διάρκεια αντοχής μικρότερη από τη μέγιστη συχνότητα.

$$32. \alpha) \left. \begin{array}{l} x + y + 5 = 75 \\ \frac{10x + 20y + 150}{75} = 12 \end{array} \right\}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $x = 65$ και $y = 5$.

$$\beta) \text{ i) } s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i = 29,333$$

$$\text{ii) } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5,42}{12}$$

33. Αφού η τυπική απόκλιση $s = \sqrt{\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2}$ είναι ίση με μηδέν, έπεται

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2 = 0 \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2 = 0. \text{ Άρα } t_1 - \bar{x} = 0, t_2 - \bar{x} = 0, \dots,$$

$$t_v - \bar{x} = 0 \quad \text{ή} \quad t_1 = t_2 = \dots = t_v = \bar{x}.$$

$$34. \sum_{i=1}^5 x_i = 3 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 23$$

$$\alpha) \sum_{i=1}^5 (x_i + 10) = (x_1 + 10) + (x_2 + 10) + (x_3 + 10) + (x_4 + 10) + (x_5 + 10) =$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 5 \cdot 10 = \sum_{i=1}^5 x_i + 50 = 3 + 50 = 53$$

$$\beta) \sum_{i=1}^5 (2x_i + 3)^2 = \sum_{i=1}^5 (4x_i^2 + 12x_i + 9) = 4 \sum_{i=1}^5 x_i^2 + 12 \sum_{i=1}^5 x_i + 5 \cdot 9 =$$

$$4 \cdot 23 + 12 \cdot 3 + 45 = 92 + 36 + 45 = 173$$

$$35. \alpha) \text{ i) } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^v y_i}{v} = \frac{\sum_{i=1}^v (x_i + 2)}{v} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} + \frac{\sum_{i=1}^v 2}{v} = \bar{x} + 2$$

$$s_y^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i + 2 - \bar{x} - 2)^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 = s_x^2.$$

Άρα $s_y = s_x$.

$$\text{ii) } \bar{y} = \bar{x} + c, s_y = s_x.$$

β) Από τις παραπάνω περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι αν οι τιμές μιας μεταβλητής αυξηθούν κατά c μονάδες, τότε η μέση τιμή αυξάνεται κατά c και η διακύμανση μένει αμετάβλητη.

$$36. \alpha) \overline{x + \lambda} = \frac{(t_1 + \lambda) + (t_2 + \lambda) + \dots + (t_v + \lambda)}{v} = \frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_v) + v\lambda}{v} =$$

$$\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} + \frac{v\lambda}{v} = \bar{x} + \lambda$$

$$\beta) \text{ Ομοια } \overline{x - \lambda} = \frac{(t_1 - \lambda) + (t_2 - \lambda) + \dots + (t_v - \lambda)}{v} = \dots = \bar{x} - \lambda$$

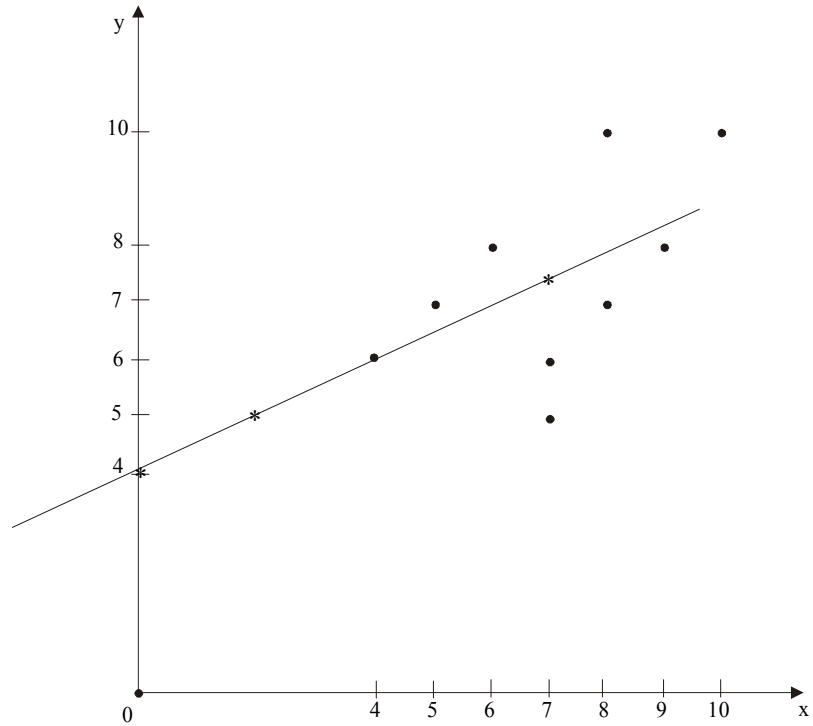
$$\gamma) \overline{x \cdot \lambda} = \frac{\lambda t_1 + \lambda t_2 + \dots + \lambda t_v}{v} = \frac{\lambda (t_1 + t_2 + \dots + t_v)}{v} = \lambda \bar{x}$$

$$\delta) \overline{\left(\frac{x}{\lambda}\right)} = \frac{\frac{t_1}{\lambda} + \frac{t_2}{\lambda} + \dots + \frac{t_v}{\lambda}}{v} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{x}$$

$$\epsilon) \overline{\lambda x + \kappa} = \frac{(\lambda t_1 + \kappa) + (\lambda t_2 + \kappa) + \dots + (\lambda t_v + \kappa)}{v} = \frac{\lambda (t_1 + t_2 + \dots + t_v)}{v} +$$

$$+ \frac{v\kappa}{v} = \lambda \bar{x} + \kappa$$

37. α) γ)



β)

Πρώτη εξέταση x	Δεύτερη εξέταση y	x^2	xy	y^2
6	8	36	48	64
5	7	25	35	49
8	7	64	56	49
8	10	64	80	100
7	5	49	35	25
6	8	36	48	64
10	10	100	100	100
4	6	16	24	36
9	8	81	72	64
7	6	49	42	36
$\Sigma x = 70$	$\Sigma y = 75$	$\Sigma x^2 = 520$	$\Sigma xy = 540$	$\Sigma y^2 = 587$

$$\bar{y} = \frac{75}{10} = 7,5, \quad \bar{x} = \frac{70}{10} = 7$$

$$\hat{\beta} = \frac{v \sum_{i=1}^v x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^v x_i \right) \left(\sum_{i=1}^v y_i \right)}{v \sum_{i=1}^v x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2} = \frac{10 \cdot 540 - 70 \cdot 75}{10 \cdot 520 - (70)^2} = \frac{5400 - 5250}{5200 - 4900} =$$

$$= \frac{150}{300} = 0,5 \text{ και } \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 7,5 - 0,5 \cdot 7 = 7,5 - 3,5 = 4, \text{ άρα } \hat{y} = 4 + 0,5x$$

38. α)

x	y	x ²	xy	y ²
1	1	1	1	1
3	2	9	6	4
4	4	16	16	16
6	4	36	24	16
8	5	64	40	25
9	7	81	63	49
11	8	121	88	64
14	9	196	126	81
Σx = 56	Σy = 40	Σx ² = 524	Σxy = 364	Σy ² = 256

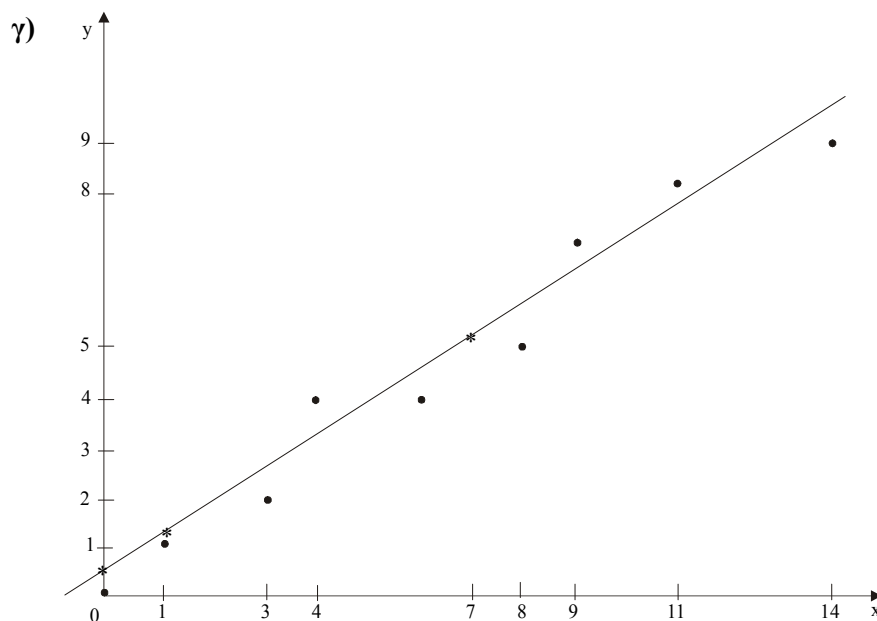
$$\beta) \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^v y_i}{v} = \frac{40}{8} = 5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} = \frac{56}{8} = 7$$

$$\hat{\beta} = \frac{v \sum_{i=1}^v x_i y_i - \sum_{i=1}^v x_i \cdot \sum_{i=1}^v y_i}{v \sum_{i=1}^v x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2} = \frac{8 \cdot 364 - 56 \cdot 40}{8 \cdot 524 - (56)^2} = \frac{2912 - 2240}{4192 - 3136} =$$

$$\frac{672}{1056} = 0,636$$

$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 5 - 0,636 \cdot 7 = 0,548$. Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = 0,548 + 0,636x$, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης 0,636 και διέρχεται από το σημείο (7, 5).



δ) Όταν $x = 12$ τότε $y = 0,548 + 0,636 \cdot 12 = 0,548 + 7,632 = 8,18 \approx 8$

39. α)

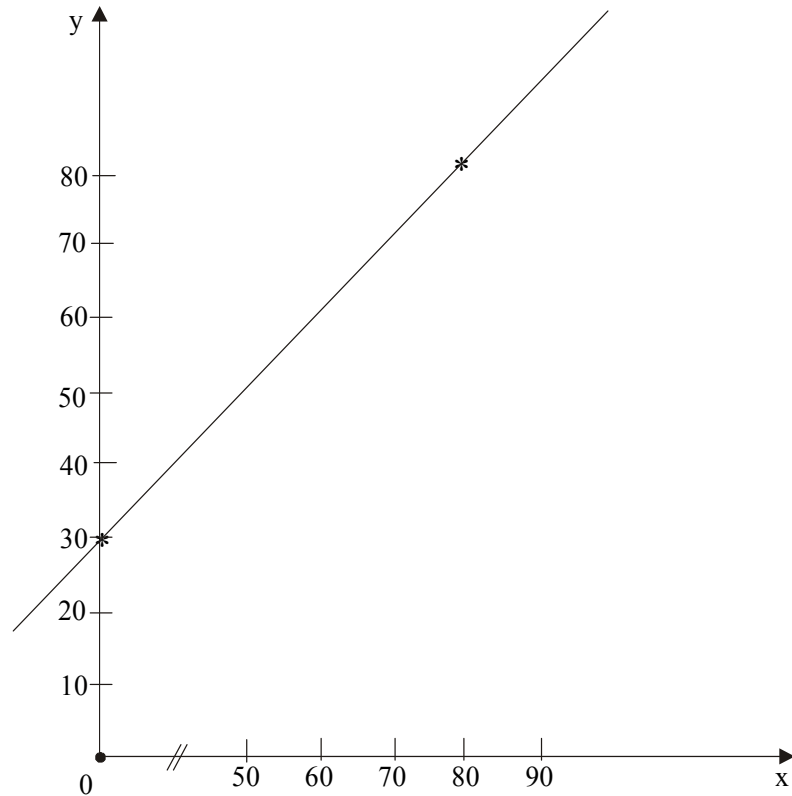
Άλγεβρα (x)	Γεωμετρία (y)	x ²	xy	y ²
75	82	5625	6150	6724
80	78	6400	6240	6084
93	86	8649	7998	7396
65	72	4225	4680	5184
87	91	7569	7917	8281
71	80	5041	5680	6400
98	95	9604	9310	9025
68	72	4624	4896	5184
84	89	7056	7476	7921
77	74	5929	5698	5476
Σx = 798	Σxy = 819	Σx ² = 64722	Σxy = 66045	Σy ² = 67675

$$\bar{y} = \frac{819}{10} = 81,9 \quad \bar{x} = \frac{798}{10} = 79,8$$

$$\hat{\beta} = \frac{v \sum_{i=1}^v x_i y_i - \sum_{i=1}^v x_i \cdot \sum_{i=1}^v y_i}{v \sum_{i=1}^v x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2} = \frac{10 \cdot 66045 - 798 \cdot 819}{10 \cdot 64722 - (798)^2} =$$

$$\frac{660450 - 653562}{647220 - 636803} = \frac{6888}{10417} = 0,66 \text{ και}$$

$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 81,9 - 0,66 \cdot 79,8 = 81,9 - 52,67 = 29,23$. Άρα η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = 29,23 + 0,66x$, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης 0,66 και διέρχεται από το σημείο (79,8, 81,9).



β) Για $x = 72$ έχουμε: $y = 29,23 + 0,66 \cdot 72 = 76,75 \approx 77$

40. $\Sigma x = 45$, $\Sigma y = 40$, $\Sigma xy = 364$, $\Sigma x^2 = 524$, $\Sigma y^2 = 256$

$$\begin{aligned} \alpha) r &= \frac{n \Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \sqrt{n \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}} = \frac{8 \cdot 364 - 56 \cdot 40}{\sqrt{8 \cdot 524 - (56)^2} \sqrt{8 \cdot 256 - (40)^2}} = \\ &= \frac{2912 - 2240}{\sqrt{4192 - 3136} \sqrt{2048 - 1600}} = \frac{672}{\sqrt{1056} \sqrt{448}} = \frac{672}{32,49 \cdot 21,16} = \frac{672}{687,48} \\ &= 0,977 \end{aligned}$$

β) Οι x , y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες.

41.

x	y	x - \bar{x}	y - \bar{y}	(x - \bar{x}) ²	(y - \bar{y}) ²	(x - \bar{x})(y - \bar{y})
35	102	- 9	5	81	25	- 45
39	100	- 5	3	25	9	- 15
41	97	- 3	0	9	0	0
43	97	- 1	0	1	0	0
40	98	- 4	1	16	1	- 4
53	100	9	3	81	9	27
50	97	6	0	36	0	0
49	91	5	- 6	25	36	- 30
40	94	- 4	- 3	16	9	12
50	94	6	- 3	36	9	- 18
Σύνολα	440	970		326	98	- 73

$$\alpha) r = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-73}{\sqrt{326} \sqrt{98}} = \frac{-73}{178,74} \approx -0,4$$

β) Τα x και y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένα.

γ) Επειδή υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ της τιμής των χρεογράφων και της τιμής των ομολογιών σημαίνει ότι όταν η τιμή των χρεογράφων πέφτει η τιμή των ομολογιών ανεβαίνει.

42. α)

x	y	x ²	xy	y ²
2	18	4	36	324
4	12	16	48	144
5	10	25	50	100
6	8	36	48	64
8	7	64	56	49
11	5	121	55	25
Σx = 36	Σxy = 60	Σx ² = 266	Σxy = 293	Σy ² = 706

$$r = \frac{6 \cdot 293 - 36 \cdot 60}{\sqrt{6 \cdot 266 - (36)^2} \sqrt{6 \cdot 706 - (60)^2}} = \frac{1728 - 2160}{\sqrt{1596 - 1296} \sqrt{4236 - 3600}} =$$

$$\frac{-402}{\sqrt{300} \sqrt{636}} = \frac{-402}{436,8} = -0,92$$

β) Αν $x' = 2x + 6$ και $y' = 3y - 15$ τότε:

x'	y'	x'^2	$x'y'$	y'^2
10	39	100	390	1521
14	21	196	294	441
16	15	256	240	225
18	9	324	162	81
22	6	484	132	36
28	0	784	0	0
$\Sigma x' = 108$	$\Sigma x'y' = 90$	$\Sigma x'^2 = 2144$	$\Sigma x'y' = 1218$	$\Sigma y'^2 = 2304$

$$r' = \frac{v \sum_{i=1}^v x'_i y'_i - \left(\sum_{i=1}^v x'_i \right) \left(\sum_{i=1}^v y'_i \right)}{\sqrt{v \sum_{i=1}^v x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2} \sqrt{v \sum_{i=1}^v y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^v y_i \right)^2}} =$$

$$\frac{6 \cdot 1218 - 108 \cdot 90}{\sqrt{6 \cdot 2144 - (108)^2} \sqrt{6 \cdot 2304 - (90)^2}} = \frac{7308 - 9720}{\sqrt{12864 - 11664} \sqrt{13824 - 8100}} =$$

$$\frac{-2412}{\sqrt{1200} \sqrt{5724}} = \frac{-2412}{2620,83} = -0,92$$

43.

Ηλικία (x)	Πίεση αίματος (y)	x ²	xy	y ²
56	17	3136	952	289
42	12	1764	504	144
72	14	5184	1008	196
36	10	1296	360	100
63	13	3969	819	169
47	09	2209	423	81
55	11	3025	605	121
49	08	2401	392	64
38	11	1444	418	121
60	15	3600	900	225
Σx = 518	Σxy = 120	Σx ² = 28028	Σxy = 6381	Σy ² = 1510

$$\begin{aligned}
 \alpha) r &= \frac{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i \right)}{\sqrt{\nu \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \right)^2} \sqrt{\nu \sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i \right)^2}} = \\
 &= \frac{10 \cdot 6381 - 518 \cdot 120}{\sqrt{10 \cdot 28028 - (518)^2} \sqrt{10 \cdot 1510 - (120)^2}} = \\
 &= \frac{63810 - 62160}{\sqrt{280280 - 268324} \sqrt{15100 - 14400}} = \frac{1650}{\sqrt{11956} \sqrt{700}} = \frac{1650}{2892,95} = 0,57
 \end{aligned}$$

$$\beta) \bar{y} = \frac{120}{10} = 12 \quad \bar{x} = \frac{518}{10} = 51,8$$

$$\hat{\beta} = \frac{v \sum_{i=1}^v x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^v x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^v y_i \right)}{v \sum_{i=1}^v x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$$

$$\hat{\beta} = \frac{10 \cdot 6381 - 518 \cdot 120}{10 \cdot 28028 - (518)^2} = \frac{63810 - 62160}{280280 - 268324} = \frac{1650}{11956} = 0,138 \text{ και}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x} = 12 - 0,138 \cdot 51,8 = 12 - 7,148 = 4,852. \text{ Άρα η ευθεία}$$

ελαχίστων τετραγώνων είναι η $\hat{y} = 4,852 + 0,138x$.

γ) Για $x = 45$ έχουμε: $y = 4,852 + 0,138 \cdot 45 = 4,852 + 6,21 = 11,062$. Άρα η πίεση γυναίκας ηλικίας 45 ετών είναι περίπου 11 cm Hg.

44. α)

x	y	x - \bar{x}	y - \bar{y}	(x - \bar{x}) ²	(y - \bar{y}) ²	(x - \bar{x})(y - \bar{y})	
1	2,5	- 2	- 1,5	4	2,25	3	
1	4,0	- 2	0	4	0	0	
2	3,0	- 1	- 1	1	1	1	
3	4,5	0	0,5	0	0,25	0	
3	4,0	0	0	0	0	0	
4	3,5	1	- 0,5	1	0,25	- 0,5	
7	6,5	4	2,5	16	6,25	10	
Σύνολα	21	28	0	0	26	10	13,5

$$\beta) x - \bar{x} = 4 \text{ ή } 7 - \bar{x} = 4 \text{ ή } \bar{x} = 3$$

$$y - \bar{y} = 2,5 \text{ ή } 6,5 - 2,5 = \bar{y} \text{ ή } \bar{y} = 4$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{7} \text{ άρα } 3 = \frac{\Sigma x}{7} \text{ ή } \Sigma x = 21$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{7} \text{ ή } 4 = \frac{\Sigma y}{7} \text{ ή } \Sigma y = 28$$

$$r = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\Sigma (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{13,5}{\sqrt{26} \sqrt{10}} = \frac{13,5}{\sqrt{260}} = \frac{13,5}{16,12} \approx 0,83$$

45. α)

Πρώτη εξέταση x	Δεύτερη εξέταση y	x ²	xy	y ²
6	8	36	48	64
5	7	25	35	49
8	7	64	56	49
8	10	64	80	100
7	5	49	35	25
6	8	36	48	64
10	10	100	100	100
4	6	16	24	36
9	8	81	72	64
7	6	49	42	36
Σx = 70	Σy = 75	Σx ² = 520	Σxy = 540	Σy ² = 587

$$\beta) r = \frac{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^v (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{10 \cdot 540 - 70 \cdot 75}{\sqrt{10 \cdot 520 - (70)^2} \sqrt{10 \cdot 587 - (75)^2}} =$$

$$\frac{5400 - 5250}{\sqrt{5200 - 4900} \sqrt{5870 - 5625}} = \frac{150}{\sqrt{300} \sqrt{245}} = \frac{150}{271,1} \approx 0,55$$

Θετικά γραμμικά συσχετισμένες γιατί $0 < 0,55 < 1$.