

3ο Κεφάλαιο**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ****Απαντήσεις στις ερωτήσεις «Σωστό - Λάθος»**

1	Σ	10	Σ	19	Λ	28	Σ	viii	Σ	32	Σ	41	Λ	50	Σ
2	Σ	11	Λ	20	Λ	29	Λ	ix	Λ	33	Λ	42	Σ	51	Λ
3	Σ	12	Σ	21	Σ	30 i	Λ	x	Λ	34	Σ	43	Σ	52	Λ
4	Σ	13	Λ	22	Λ	ii	Σ	xi	Σ	35	Σ	44	Σ	53	Σ
5	Σ	14	Σ	23	Σ	iii	Σ	xii	Σ	36	Σ	45	Λ	54	Λ
6	Σ	15	Λ	24	Σ	iv	Λ	xiii	Λ	37	Λ	46	Σ		
7	Σ	16	Σ	25	Λ	v	Σ	xiv	Σ	38	Σ	47	Σ		
8	Σ	17	Λ	26	Σ	vi	Σ	xv	Σ	39	Σ	48	Λ		
9	Σ	18	Λ	27	Σ	vii	Σ	31	Σ	40	Σ	49	Σ		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1	B	5	Δ	9	E	13	Γ	17	B	21	B	25	A	39	E
2	A	6	Γ	10	Γ	14	Δ	18	Γ	22	B	26	E		
3	Δ	7	E	11	B	15	E	19	E	23	E	27	Δ		
4	A	8	Δ	12	E	16	Γ	20	Δ	24	E	28	E		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	VI	5	VII
2	V	6	VIII
3	IV	7	IX
4	I	8	X
		9	XI

Απαντήσεις στις ερωτήσεις συμπλήρωσης

1.

<i>Γραφή σε γλώσσα συνόλου</i>	<i>Γραφή σε φυσική γλώσσα</i>	<i>μέρος του σχήματος</i>
$A \cap B$	A τομή B	II
B'	Συμπλήρωμα του B	IV + I
$A \cup B$	A ένωση B	I + II + III
A'	Συμπλήρωμα του A	III + IV
$A - B$	A μείον B	I
$B - A$	B μείον A	III
$A \cap B'$	A τομή συμπλήρωμα B	I
$A' \cap B$	A συμπλήρωμα τομή B	III

2.

A	B	Γ
$A \cup A = A$	Σ	
$A \cup \emptyset = A$	Σ	
$A \cap A = \emptyset$	Λ	$A \cap A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	Λ	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A' \cap A = \Omega$	Λ	$A' \cap A = \emptyset$
$A' \cup A = \emptyset$	Λ	$A' \cup A = \Omega$
$\Omega' = \Omega$	Λ	$\Omega' = \emptyset$
$(A')' = \Omega$	Λ	$(A')' = A$
$A \cap B = B \cap A$	Σ	
$A \cap B = B \cup A$	Λ	$A \cap B = B \cap A$
$\emptyset' = \Omega$	Σ	
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cup B = B$	Σ	
$A' \cup A = \Omega$	Σ	
$A' \cap A = \emptyset$	Σ	
$(A')' = A$	Σ	
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$	Σ	

3.

Μεταθέσεις των α, β, γ	
αβγ	βγα
αγβ	γαβ
βαγ	γβα

4.

Φυσική γλώσσα	Συμβολισμός	Ισότητα
Μεταθέσεις των n πραγμάτων.	M_n	$M_n = n!$
Διατάξεις των n πραγμάτων ανά k .	Δ_k^n	$\Delta_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$
Συνδυασμοί των n πραγμάτων ανά k .	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

5.

A	B
Για κάθε χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ η πρόταση $\pi(\chi)$ αληθεύει.	Υπάρχει τουλάχιστον ένα χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ για το οποίο η πρόταση $\pi(\chi)$ δεν αληθεύει.
Υπάρχει τουλάχιστον ένα χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ για το οποίο η πρόταση $\pi(\chi)$ αληθεύει.	Για κάθε χ που ανήκει σ' ένα σύνολο Σ η πρόταση $\pi(\chi)$ δεν αληθεύει.
«...το πολύ n φορές»	«...τουλάχιστον $n + 1$ φορές»
«...τουλάχιστον n φορές»	«...το πολύ $n-1$ φορές»

6.

A	B	Γ
<i>Μεταθέσεις των 3</i>	<i>Συνδυασμοί των 3 ανά 2</i>	<i>Διατάξεις των 3 ανά 2</i>
Ο □ Δ	Ο □	Ο □
Ο Δ □	Ο Δ	Ο Δ
Δ Ο □	□ Δ	□ Δ
Δ □ Ο		□ Ο
□ Ο Δ		Δ □
□ Δ Ο		Δ Ο

Απαντήσεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

- $\Omega = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, \Gamma1, \Gamma2, \Gamma3, \Gamma4, \Gamma5, \Gamma6\}$.
- Σ_1 : Σακούλα που περιέχει 1(M), 1(Π), 1(A).
 Σ_2 : Σακούλα που περιέχει 1(M), 1(A).
 α) $\Omega = \{\Sigma_1M, \Sigma_1\Pi, \Sigma_1A, \Sigma_2M, \Sigma_2A\}$.
 β) $A = \{\Sigma_1M, \Sigma_2M\}$.
 γ) $B = \{\Sigma_1\Pi\}$.
- α) $\Omega = \{K, \Pi, M, \Lambda\}$.
 β) $\Omega = \{K\Pi, KM, K\Lambda, KK, \Pi K, \Pi M, \Pi\Lambda, \Pi\Pi, MK, M\Pi, M\Lambda, MM, \Lambda K, \Lambda\Pi, \Lambda M, \Lambda\Lambda\}$.
 γ) $\Omega = \{K\Pi, KM, K\Lambda, \Pi K, \Pi M, \Pi\Lambda, MK, M\Pi, M\Lambda, \Lambda K, \Lambda\Pi, \Lambda M\}$.
- Είναι ασυμβίβαστα διότι η πραγματοποίηση του ενός συνεπάγεται την μη πραγματοποίηση του άλλου.

5. Ε: ελαττωματικό CD, Κ: μη ελαττωματικό CD.

α) $\Omega = \{EE, EKE, EKKE, EKKK, KEE, KEKE, KEKK, KKEE, KKEK, KKKE, KKKK\}$.

β) i) $B = \{EE, EKE, EKKE, KEE, KEKE, KKEE\}$.

ii) $\Gamma = \{EE, EKE, EKKE, KEE, KEKE, KKEE\}$.

iii) $\Delta = \{EE, EKE, EKKE, EKKK, KEE, KEKE, KEKK, KKEE, KKEK, KKKE, KKKK\}$.

6. α) $\Omega = \{O_1O_1, O_1O_2O_1, O_1O_2O_2, O_2O_1O_1, O_2O_1O_2, O_2O_2\}$.

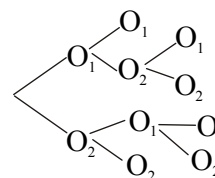
β) i) $A = \{O_1O_2O_2, O_2O_1O_2\}$.

ii) $B = \{O_2O_2\}$.

iii) $\Gamma = \{O_1O_1, O_1O_2O_1, O_1O_2O_2, O_2O_1O_1, O_2O_1O_2\}$.

γ) 3.

δ) Είναι συμπληρωματικά.



7. α) $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$.

β) i) $A = \{KK, K\Gamma\}$, ii) $B = \{KK, \Gamma K\}$, iii) $\Gamma = \{K\Gamma, \Gamma K\}$.

γ) Όχι, διότι $A \cap B = \{KK\}$, $A \cap \Gamma = \{K\Gamma\}$, $B \cap \Gamma = \{\Gamma K\}$.

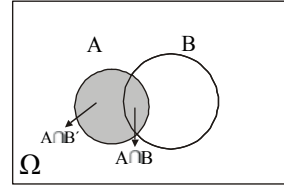
8. Αν $A = \{5\}$, τότε $A' = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ άρα $P(A) = \frac{1}{6}$ και

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

9. α) $P(A) = 1 - P(A') = \frac{1}{3}$.

$$\beta) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \dots P(B) = \frac{2}{3}.$$

10. I) α) $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A$ (βλ. σχήμα).
 β) $(A \cap B') \cap (A \cap B) = \emptyset$ (βλ. σχήμα).
 γ) Αφού $A \cap B'$ και $A \cap B$ ασυμβίβαστα,



$$P(A) = P((A \cap B') \cup (A \cap B)) = P(A \cap B') + P(A \cap B).$$

$$\text{II) } P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

$$11. \alpha) P = \frac{1}{6 \cdot 52}. \quad \beta) P = \frac{4}{6 \cdot 52}.$$

Λύση με τον πολλαπλασιαστικό νόμο:

α) A : το ζάρι να δείξει 5. B : το τραπουλόχαρτο να είναι 5 σπαθί.

A, B είναι φυσικώς ανεξάρτητα.

$$\text{Άρα } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{52} = \frac{1}{312}.$$

β) B : το τραπουλόχαρτο να είναι 5.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{52} = \frac{4}{312} = \frac{1}{78}.$$

$$12. \Omega = \left\{ \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\} \right\}.$$

Φ: το ενδεχόμενο να είναι ημίτονο και συνημίτονο του ίδιου τόξου.

$$\Phi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}, \text{ διότι } \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 = 1. \text{ Άρα } P(\Phi) = \frac{1}{3}.$$

13. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

α) $A = \{1, 9\}$ άρα $P(A) = \frac{2}{9}$.

β) $B = \{2, 8\}$ άρα $P(B) = \frac{2}{9}$.

γ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$ (αφού $A \cap B = \emptyset$).

δ) $\Gamma = \emptyset$ άρα $P(\Gamma) = 0$.

14. α) $P(A \cap (A' \cap B)) = P(\emptyset) = 0$ (αφού $A, A' \cap B$ ασυμβίβαστα - βλ. άσκ. 5).

β) $P(A \cup (A' \cap B)) = P(A) + P(A' \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

15. α) $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6}$. β) $P(B) = \frac{1}{6}$. γ) $P(\Gamma) = \frac{5}{6}$.

16. $P(A)$: η πιθανότητα να κρυολογήσουμε.

$P(A')$: η πιθανότητα να μην κρυολογήσουμε.

Έτσι $P(A) = 3 P(A')$. Όμως $P(A) + P(A') = 1, \dots, P(A) = \frac{3}{4}$.

17. A : λειτουργούν τα λεωφορεία.

B' : δεν λειτουργούν τα τραίνα.

$P(A) = 0,3, P(B') = 0,4,$ άρα $P(B) = 0,6$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ άρα $0,9 = 0,3 + 0,6 - P(A \cap B)$ άρα

$P(A \cap B) = 0$.

18. Είναι βέβαιο ότι επιλέγοντας τρεις κάλτσες θα έχουμε 1 ζευγάρι του ίδιου χρώματος. Άρα η πιθανότητα είναι 1 (η άσκηση μπορεί επίσης να λυθεί ορίζοντας κατάλληλα ενδεχόμενα).

19. $\Omega = \{\{80^\circ, 100^\circ, 60^\circ\}, \{80^\circ, 100^\circ, 20^\circ\}, \{100^\circ, 60^\circ, 20^\circ\}, \{60^\circ, 80^\circ, 20^\circ\}\}$.

Η ευνοϊκή τριάδα είναι $\{100^\circ, 60^\circ, 20^\circ\}$. Άρα $P = \frac{1}{4}$.

20. α) Λάθος, διότι αν π.χ. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ και $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ τότε

$$P(A) = P(B) \text{ αλλά } A \neq B.$$

β) Σωστή (άρνηση της πρότασης (α)).

γ) Σωστή, αφού αν $A = B$ τότε $N(A) = N(B)$, συνεπώς

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(B).$$

δ) Λάθος (βλέπε πρόταση (α)).

ε) Λάθος, διότι αν π.χ. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ και $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 4\}$, τότε

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } P(A) + P(B) = 1, \text{ όμως } B \neq A' = \{3, 4\}.$$

21.

	<i>Αγόρια</i>	<i>Κορίτσια</i>	ΣΥΝΟΛΟ
<i>Άριστοι</i>	5	3	8
<i>Μη άριστοι</i>	15	6	21
ΣΥΝΟΛΟ	20	9	29

A : Να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά.

B : Να είναι κορίτσι.

Γ : Να είναι κορίτσι άριστο στα Μαθηματικά.

Δ: Να είναι κορίτσι ή να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά.

$$\alpha) P(A) = \frac{21}{29}. \quad \beta) P(B) = \frac{9}{29}. \quad \gamma) P(\Gamma) = \frac{3}{29}.$$

$$\delta) P(\Delta) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) = \frac{9}{29} + \frac{21}{29} - \frac{6}{29} = \frac{24}{29}.$$

22. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $A' = \{1, 3, 5\}$.

Όμως $P(A) = 2P(A')$, αλλά $P(A) + P(A') = 1, \dots, P(A') = \frac{1}{3}$.

23. Με $10!$ τρόπους.

24. α) Η θέση του πρώτου ψηφίου μπορεί να πληρωθεί με 9 τρόπους. Όμοια η θέση του δεύτερου και του τρίτου μπορεί επίσης να πληρωθεί με 9 τρόπους. Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε 9^3 τριψήφιους αριθμούς.

β) $\Delta \frac{9}{3} = 504$.

25. α) Όλες οι δυνατές στήλες είναι $\binom{49}{6}$.

Η ευνοϊκή είναι 1, άρα $P = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816}$.

β) $P = 10 \cdot \frac{1}{13.983.816}$ (προσθετικός νόμος).

γ) 13.983.816.

26. $\binom{v}{2}$ ευθείες.

27. $\binom{v}{3}$ τρίγωνα.

28. $\binom{v}{2} - v = \frac{v(v-3)}{2}$ διαγώνιοι.

29. α) $N(\Omega) = 10!$ Στις δύο πρώτες θέσεις μπορούν να είναι ελληνικές ομάδες κατά $2!$ τρόπους. Στις υπόλοιπες οκτώ θέσεις μπορούν να είναι ξένες ομάδες κατά $8!$ τρόπους. Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι συνολικά $2! \cdot 8!$.

Άρα $P_a = \frac{2! \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{45}$.

β) Στις δύο πρώτες θέσεις μπορούν να είναι ξένες ομάδες κατά Δ_2^8 τρόπους.
 Στις υπόλοιπες μπορούν να είναι ελληνικές και ξένες κατά $8!$. Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι συνολικά $(\Delta_2^8) \cdot 8! = 56 \cdot 8!$.

$$\text{Άρα } P_\beta = \frac{56 \cdot 8!}{10!} = \frac{56}{90} = \frac{28}{45}.$$

$$\gamma) P_\gamma = 1 - P_\beta = 1 - \frac{28}{45} = \frac{17}{45}.$$

30. $\binom{v}{v} = 1, \binom{v}{0} = 1, \binom{v}{1} = v.$

31. Τα 4 βιβλία Αρχαίων τοποθετούνται κατά $4!$ τρόπους (μεταθέσεις). Όμοια των Μαθηματικών κατά $2!$, της Φυσικής κατά $3!$. Οι τρεις ομάδες μπορούν να τοποθετηθούν κατά $3!$. Άρα συνολικά έχουμε $3! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 3!$ τρόπους.

32. Μπορούμε να σχηματίσουμε:

9 μονοψήφιους αριθμούς, 9^2 διψήφιους,

9^3 τριψήφιους, ..., 9^9 εννεαψήφιους.

Άρα συνολικά $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 + 9^7 + 9^8 + 9^9$

(Γεωμετρική πρόοδος με λόγο 9).

33. $P = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}.$

34. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6$ δυνατές περιπτώσεις.

Ευνοϊκές 2, διότι $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$

$$\text{Άρα } P = \frac{1}{3}.$$

$$35. \alpha) \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{2! \cdot 8!} = 45 \text{ τρόποι επιλογής δύο ατόμων.}$$

Οι ευνοϊκοί είναι 5 (αφού 5 είναι τα παντρεμένα ζευγάρια).

$$\text{Άρα } P_{\alpha} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}.$$

β) Υπάρχουν πέντε τρόποι επιλογής ενός άνδρα και 4 τρόποι επιλογής μιας

$$\text{γυναίκας που δεν είναι η σύζυγός του. Άρα } P_{\beta} = \frac{5 \cdot 4}{\binom{10}{2}} = \frac{20}{45}.$$

$$\gamma) P_{\gamma} = 1 - P_{\alpha} - P_{\beta} = \frac{4}{9}.$$

$$36. \alpha) P(M) = P(M|\Sigma_1) \cdot P(\Sigma_1) + P(M|\Sigma_2) P(\Sigma_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

$$\beta) P(A) = P(A|\Sigma_1) \cdot P(\Sigma_1) + P(A|\Sigma_2) P(\Sigma_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

$$\gamma) P(\Pi) = P(\Pi|\Sigma_1) \cdot P(\Sigma_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

37. A : ο σύζυγος ζει το 2010, B : η σύζυγος ζει το 2010.

Θεωρούνται ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

$$\text{Ζητούμε } P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{24}{100} = 24\%.$$

38. Αφού A, B είναι ασυμβίβαστα, τότε $A \cap B = \emptyset$ άρα $P(A \cap B) = 0$. (1)

Αν ήταν ανεξάρτητα, θα έπρεπε $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Τότε όμως $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0$ **(2)** λόγω της **(1)**,
 αλλά $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$ (αφού A, B δεν είναι αδύνατα ενδεχόμενα),
 άρα η **(2)** είναι αδύνατη, άρα τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

$$39. \alpha) P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

$$\beta) P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}.$$

$$40. \alpha) A : \text{είναι καπνιστής}, \quad P(A) = \frac{50}{200} = 25\%.$$

$$\beta) B : \text{έχει προβλήματα υγείας}, \quad P(B) = \frac{40}{200} = 20\%.$$

$$\gamma) \Gamma : \text{είναι καπνιστής χωρίς προβλήματα υγείας}, \quad P(\Gamma) = \frac{30}{200} = 15\%.$$

$$\delta) A \cap B : \text{είναι καπνιστής με προβλήματα υγείας}, \quad P(A \cap B) = \frac{20}{200} = 10\%.$$

ε) E : έχει προβλήματα υγείας **δεδομένου** ότι είναι καπνιστής.

Με χρήση του πίνακα υπάρχουν 20 καπνιστές με προβλήματα υγείας σε
 σύνολο 50 καπνιστών. Άρα $P(E) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4$

$$\text{ή } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{200}}{\frac{50}{200}} = 0,4.$$

$$41. \alpha) \text{ Η πιθανότητα να βρέξει την 1η επόμενη μέρα είναι } P = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}.$$

Είναι όμως δυνατό να βρέξει τη 2η μέρα **ή** την 3η μέρα. Άρα η
 πιθανότητα βροχής την 1η **ή** την 2η **ή** την 3η μέρα είναι $P_a = 3P = \frac{6}{27}.$

β) Η πιθανότητα να μη βρέξει τις επόμενες τρεις μέρες είναι

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}. \quad (1)$$

Το **πολύ μια φορά** σημαίνει **καμία φορά ή μία φορά**. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P_\beta = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} = \frac{7}{27}$.

γ) Το ενδεχόμενο **να βρέξει τουλάχιστον μια φορά** είναι συμπληρωματικό του ενδεχομένου **να μη βρέξει**. Άρα $P_\gamma = 1 - P = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$ λόγω της (1).