

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

(εκπαιδευτικό υλικό Τεχνολογικής κατεύθυνσης 1999-2000)

ΜΕΡΟΣ Α΄: ΑΛΓΕΒΡΑ



Κεφάλαιο 2ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

- | | | |
|--|---|---|
| 1. * Η ισότητα στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών ορίζεται από την ισοδυναμία: $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$. | Σ | Λ |
| 2. * Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $z = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$. | Σ | Λ |
| 3. * Αν $z = \kappa + \lambda i$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\operatorname{Re}(z) = \kappa$. | Σ | Λ |
| 4. * Αν $z = x + (y - 1)i$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $\operatorname{Im}(z) = 0$, τότε $y = 1$. | Σ | Λ |
| 5. * Αν $z_1, z_2 \in C$ με $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 0$, τότε $\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) = 0$. | Σ | Λ |
| 6. * Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha \neq 0$, τότε ο $\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} i$. | Σ | Λ |
| 7. * Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ορίζεται $z^0 = 1$. | Σ | Λ |
| 8. * Αν $z \in C$, τότε $\overline{\overline{z}} = z$. | Σ | Λ |
| 9. * Ο αριθμός z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z = \overline{z}$. | Σ | Λ |
| 10. * Ο αριθμός z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z = -\overline{z}$. | Σ | Λ |
| 11. * Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_1 + z_2 = 2\alpha$, τότε $z_2 = \overline{z_1}$. | Σ | Λ |
| 12. * Αν $i^2 = -1$, τότε $i^{2003} = i$. | Σ | Λ |
| 13. * Η διαφορά δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι φανταστικός αριθμός. | Σ | Λ |
| 14. * Οι εικόνες των φανταστικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στον άξονα $y'y$. | Σ | Λ |
| 15. * Οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. | Σ | Λ |
| 16. * Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο με $\operatorname{Re}(z) = 2$ βρίσκονται στην ευθεία $x = 2$. | Σ | Λ |
| 17. * Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο με $\operatorname{Im}(z + i) = 8$ βρίσκονται στην ευθεία $y = 8$. | Σ | Λ |

18. * Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο και ο άξονας $x'x$ είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος M_1M_2 , τότε είναι $z_1 = \bar{z}_2$. Σ Λ
19. * Το μέτρο του $z = -2 + 3i$ είναι 13. Σ Λ
20. * Για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Σ Λ
21. * Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, παριστάνει τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$. Σ Λ
22. * Αν $K(z_0)$ η εικόνα του μιγαδικού z_0 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$, $z \in \mathbb{C}$, παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(z_0)$ και ακτίνα ρ . Σ Λ
23. * Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των μιγαδικών $z_\lambda = 2\lambda + (\lambda^2 + 1)i$ βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Σ Λ
24. * Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με άγνωστο το $z \in \mathbb{C}$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ έχει μόνο μια λύση. Σ Λ
25. * Για κάθε μιγαδικό αριθμό ορίζεται όρισμα. Σ Λ
26. * Αν $\text{Arg}z = \theta$ τότε και $\text{Arg}\bar{z} = \theta$. Σ Λ
27. * Η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta i$ είναι $z = \rho(\cos\theta + i\eta\mu\theta)$, όπου $\rho = |z|$ και θ ένα όρισμά του. Σ Λ
28. * Αν $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4})$ τότε ένα όρισμα του z είναι το $\frac{21\pi}{4}$. Σ Λ
29. * Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ ισχύει $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\frac{\theta_1}{\theta_2} + i\eta\mu\frac{\theta_1}{\theta_2})$. Σ Λ

30. * Αν ένας μιγαδικός αριθμός πολλαπλασιαστεί επί i^5 τότε η διανυσματική του ακτίνα στρέφεται κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$. Σ Λ
31. * Δύο ορίσματα ενός μιγαδικού αριθμού διαφέρουν κατά γωνία $2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Σ Λ
32. * Αν τα ορίσματα δύο μιγαδικών διαφέρουν κατά $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, τότε οι εικόνες τους και η αρχή των αξόνων βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Σ Λ
33. * Ισχύει: $(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})^4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Σ Λ
34. * Η εξίσωση $z^3 - i = 0$ έχει μοναδική ρίζα τον $z_0 = i$. Σ Λ
35. * Η εξίσωση $z^5 = 1$ έχει πέντε ρίζες, των οποίων οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το O (αρχή των αξόνων) και ακτίνα 1. Σ Λ
36. * Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, μπορεί να έχει ρίζες τους μιγαδικούς $1 + i$ και $1 - i$. Σ Λ
37. * Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$, $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον $2 + i$ θα έχει και τον $\frac{5}{2+i}$. Σ Λ
38. * Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a, \beta, \gamma, \in \mathbb{R}^*$ έχει πάντοτε λύση στο \mathbb{C} . Σ Λ
39. * Υπάρχει εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές 3ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $2, 1 + i, 2 + i$. Σ Λ
40. * Οι εξισώσεις $x^v = 1$ και $x^\mu = 1$, $v, \mu \in \mathbb{N}^*$ έχουν τουλάχιστον μια κοινή ρίζα. Σ Λ
41. * Αν η εξίσωση $ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta = 0$, $a \neq 0$ έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε αυτή έχει οπωσδήποτε μια πραγματική ρίζα. Σ Λ

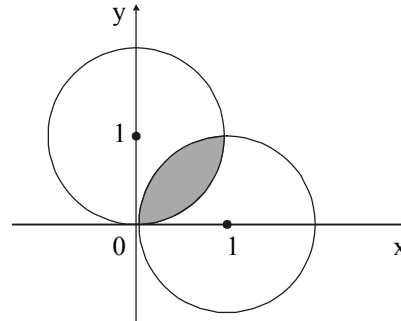
Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η ισότητα $x + (y - 1)i = 3 + 4i$, $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει αν και μόνο αν
Α. $x = 3$ ή $y = 5$ Β. $x = 3$ και $y = 5$
Γ. $x = 3$ ή $y = 4$ Δ. $x = 3$ και $y = 4$ Ε. $x + y = 7$
2. * Αν $z = a + \beta i$ με $a\beta \neq 0$ και \bar{z} ο συζυγής του ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι σωστή;
Α. $z + \bar{z}$ πραγματικός αριθμός Β. $z - \bar{z}$ φανταστικός αριθμός
Γ. $z \cdot \bar{z}$ φανταστικός αριθμός Δ. $-\overline{z \cdot \bar{z}}$ πραγματικός αριθμός
Ε. $\overline{z + \bar{z}}$ πραγματικός αριθμός
3. * Ο αριθμός i^{2000} ισούται με:
Α. i Β. 1 Γ. -1 Δ. i Ε. 0
4. * Αν $v \in \mathbb{N}$, από τις παρακάτω ισότητες **δεν** είναι σωστή η
Α. $i^{4v} = 1$ Β. $i^{4v+1} = -i$ Γ. $i^{4v+2} = -1$ Δ. $i^{v+4} = i^v$ Ε. $i^{4v+3} = -i$
5. * Ο $\frac{1}{2-4i}$ ισούται με
Α. $\frac{2+4i}{20}$ Β. $\frac{-2+4i}{20}$ Γ. $\frac{2-4i}{20}$
Δ. $\frac{-2-4i}{20}$ Ε. κανένα από τα προηγούμενα
6. * Το $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1821}$ ισούται με
Α. $1+i$ Β. $1-i$ Γ. i Δ. 2 Ε. -2

7. * Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = (x + 1) + (y - 1)i$, $x, y \in \mathbb{R}$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο $z = x + yi$ ισούται με
A. $1 - i$ **B.** $1 + i$ **Γ.** $-1 - i$ **Δ.** $-1 + i$ **Ε.** $2 + 2i$
8. * Η εικόνα κάθε φανταστικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση
A. $y = x$ **B.** $y = -x$ **Γ.** $y = 0$
Δ. $x = 0$ **Ε.** σε καμία από τις προηγούμενες.
9. * Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $2 + 3i$ και $3 + 2i$ στο μιγαδικό επίπεδο έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία
A. $x = 2$ **B.** $y = 3$ **Γ.** $y = x$ **Δ.** $y = -x$ **Ε.** $x = 0$
10. * Αν η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z έχει φορέα τη διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, τότε ο z μπορεί να είναι ο
A. $2 + i$ **B.** $-2 + 2i$ **Γ.** $2 + 2i$ **Δ.** $-2 - 2i$ **Ε.** $-2 - i$
11. * Στο μιγαδικό επίπεδο, οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά
A. ως προς τον άξονα $y'y$ **B.** ως προς τον άξονα $x'x$
Γ. ως προς την ευθεία $y = x$ **Δ.** ως προς την ευθεία $y = -x$
Ε. ως προς την αρχή των αξόνων
12. * Αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο της ευθείας $2x + 3y - 1 = 0$, τότε ο z **δεν** μπορεί να είναι ο
A. $\frac{1}{2}$ **B.** $1 - \frac{1}{3}i$ **Γ.** $5 - 3i$ **Δ.** $\frac{1}{3}i$ **Ε.** $1 + 2i$
13. * Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1 = -1 - 2i$, $z_2 = 5 + 2i$, $z_3 = 5 - 2i$ και $z_4 = -1 + 2i$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές
A. τετραγώνου **B.** ορθογωνίου **Γ.** τραπεζίου
Δ. ρόμβου **Ε.** τυχαίου τετραπλεύρου

26. * Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z βρίσκεται επάνω στον κύκλο $|z| = 1$, τότε η εικόνα του $w = \frac{3}{z}$ βρίσκεται
- A. στον ίδιο κύκλο
 B. στον ομόκεντρο κύκλο ακτίνας 3
 Γ. στον ομόκεντρο κύκλο ακτίνας $\frac{1}{3}$
 Δ. στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x$
 E. κανένα από τα παραπάνω
27. * Αν η εξίσωση $|z - 2| = |z - ki|$ επαληθεύεται από τους μιγαδικούς αριθμούς που η εικόνα τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία $y = x$, ο πραγματικός αριθμός k ισούται με
- A. 1 B. - 1 Γ. 2 Δ. - 2 E. 4
28. * Στο μιγαδικό επίπεδο ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(2, 1)$ και ακτίνα 3 είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει
- A. $|z - (2 - i)| = 3$ B. $|z - (1 + 2i)| = 3$
 Γ. $|z - (2 + i)| = 9$ Δ. $|z - (2 + i)| = 3$ E. $|z + (2 + i)| = 3$
29. * Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία τότε το πλήθος των λύσεων του συστήματος $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$ με άγνωστο τον $z \in \mathbb{C}$ είναι
- A. 2 B. 3 Γ. 1 Δ. 4 E. 0

30. * Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει



A. $|z+1| < 1$ και $|z+i| < 1$

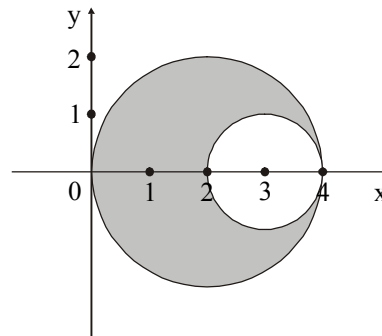
B. $|z-1| < 1$ και $|z+i| < 1$

Γ. $|z-1| > 1$ και $|z-i| > 1$

Δ. $|z-1| < 1$ και $|z-i| < 1$

Ε. $|z+1| < 1$ και $|z-i| < 1$

31. * Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει



A. $|z-2| < 2$ και $|z-3| < 1$

B. $|z-2| < 2$ και $|z-3| > 1$

Γ. $|z+2| < 2$ και $|z-3| > 1$

Δ. $|z+2| < 2$ και $|z+3| > 1$

Ε. $|z-2| > 2$ και $|z-3| < 1$

32. * Για το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού z ποια από τις παρακάτω προτάσεις δεν είναι σωστή;

A. Το $\text{Arg}(z)$ βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2\pi)$

B. Το $\text{Arg}(z)$ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z με τον άξονα $x'x$ και παίρνει τιμές στο $[0, 2\pi)$

Γ. Αν $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ ο z έχει πραγματικό μέρος ίσο με το φανταστικό

Δ. Αν $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ ο z είναι πραγματικός αριθμός

Ε. Αν $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$ τότε $\text{Re}(z) = -\text{Im}(z)$

33. * Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha \beta \neq 0$ και $\text{Arg}(z) = \theta$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ τότε πάντοτε ισχύει

A. $\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon\phi\theta$

B. $\alpha\beta = \sigma\phi\theta$

Γ. $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\phi\theta$

Δ. $\alpha\beta = \varepsilon\phi\theta$

E. $\alpha + \beta = \sigma\phi\theta$

34. * Αν $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$, η εικόνα του z είναι σημείο της ευθείας με εξίσωση

A. $y = x$

B. $y = -x$

Γ. $y = 2x$

Δ. $y = -2x$

E. $y = \frac{\sqrt{2}}{2} x$

35. * Αν η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται στην ευθεία $y = -x$ τότε από τα παρακάτω μπορεί να είναι πρωτεύον όρισμα του z το

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $-\frac{\pi}{4}$

Γ. $\frac{3\pi}{4}$

Δ. π

E. $\frac{5\pi}{4}$

36. * Αν A, B είναι οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών z και iz αντιστοίχως τότε η γωνία AOB (O η αρχή των αξόνων) ισούται με

A. $\frac{3\pi}{2}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

Γ. π

Δ. $\frac{5\pi}{6}$

E. $\frac{\pi}{2}$

37. * Από τους παρακάτω μιγαδικούς αριθμούς γραμμένος σε τριγωνομετρική μορφή είναι ο

A. $-2(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$

B. $3(-\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$

Γ. $3(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$

Δ. $4(\eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta)$

E. $-3(\eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta)$

38. * Αν $z_1 = z_2$ όπου $z_1 = \rho (\cos\theta + i\eta\mu\theta)$ και $z_2 = \rho (\cos \frac{\pi}{3} + i\eta\mu \frac{\pi}{3})$, $\rho > 0$,

τότε η γωνία θ δεν μπορεί να είναι

A. $\frac{7\pi}{3}$ B. $\frac{13\pi}{3}$ Γ. $\frac{19\pi}{3}$ Δ. $\frac{22\pi}{3}$ E. $\frac{25\pi}{3}$

39. * Αν $z = \rho (\cos \frac{\pi}{9} + i\eta\mu \frac{\pi}{9})$, $\rho > 0$, τότε το $\text{Arg}(\bar{z})$ ισούται με

A. $-\frac{\pi}{9}$ B. $\frac{10\pi}{9}$ Γ. $\frac{7\pi}{9}$ Δ. $\frac{11\pi}{9}$ E. $\frac{17\pi}{9}$

40. * Αν $z = \cos \frac{\pi}{4} + i\eta\mu \frac{\pi}{4}$, τότε ο z^{2000} ισούται με

A. $\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1 Γ. -1 Δ. 0 E. -i

41. * Ο $z = (\cos \frac{\pi}{90} + i\eta\mu \frac{\pi}{90})^{45}$ ισούται με

A. 0 B. 1 Γ. -i Δ. i E. -1

42. * Αν $z = \cos\theta + i\eta\mu\theta$ τότε ο $\frac{1}{z}$ ισούται με

A. $\frac{1}{\cos\theta} + i \frac{1}{\eta\mu\theta}$ B. $\cos \frac{1}{\theta} + i\eta\mu \frac{1}{\theta}$ Γ. $-\cos\theta - i\eta\mu\theta$

Δ. $\cos(-\theta) + i\eta\mu(-\theta)$ E. $-\cos\theta + i\eta\mu\theta$

43. * Αν η εξίσωση $x^3 + \kappa x + \lambda = 0$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, έχει ως λύση την $x = 2 + 5i$, τότε αποκλείεται να έχει λύση την

A. $x = 5$ B. $x = 2 - 5i$ Γ. $x = 0$ Δ. $x = 1 + i$ E. $x = -3$

44. * Η εξίσωση $x^2 - 2x + \alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει ρίζα τον $1 + i$. Ο α ισούται με
 Α. 1 Β. $\frac{1}{4}$ Γ. 2 Δ. 0 Ε. - 2
45. * Αν $P(x)$ πολώνυμο τουλάχιστον 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές και η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό $2 - i$, θα έχει οπωσδήποτε και τον
 Α. $2 + i^{20}$ Β. $\frac{1}{2 + i^{20}}$ Γ. $2 + i^{33}$ Δ. $\frac{1}{2 + i}$ Ε. $2 - i^4$
46. * Οι αριθμοί $2 + i$, $3 - 5i$, $-1 + 3i$, $2 + 7i$ είναι ρίζες του πολωνύμου $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, με πραγματικούς συντελεστές. Για το n ισχύει
 Α. $n = 4$ Β. $n = 6$ Γ. $4 < n < 8$
 Δ. $n \geq 8$ Ε. $6 \leq n < 8$
47. * Η εξίσωση $z^6 + z^3 + 3z^2 + 3z + 36 = 0$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $-\sqrt{3}i$. Τότε έχει οπωσδήποτε και τον
 Α. - 1 Β. $1 + \sqrt{3}i$ Γ. $-\sqrt{3}$ Δ. 1 Ε. $\sqrt{3}i$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για τους αριθμούς που δίνονται στην αριστερή στήλη:

z	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$	$-z$	\bar{z}	$\frac{1}{z}$	$ z $
$-2 + 3i$						
$-2i$						
-5						
$\frac{1}{3i}$						

2. * Οι αριθμοί z_1, z_2 είναι μιγαδικοί. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

μιγαδικός αριθμός z	$z_1 = \sqrt{3} + i$	$z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$	$z_1 \cdot z_2 = \dots$	$\frac{z_2}{z_1} = \dots$	$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = \dots$
$ z $					
$\text{Agr}(z)$					
τριγωνομετρική μορφή z					

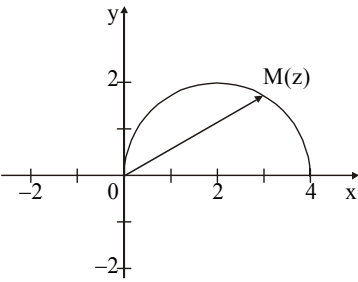
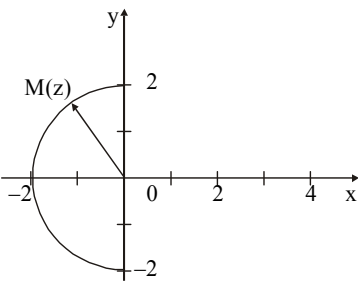
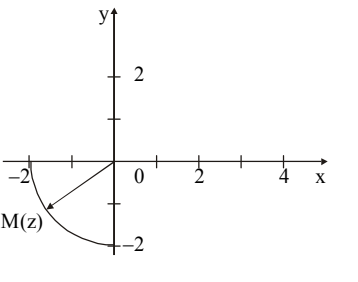
Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε μιγαδικός αριθμός της στήλης A να αντιστοιχεί στην εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο που βρίσκεται στη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
1. $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	
2. $z_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$	
3. $z_3 = \cos \frac{19\pi}{6} + i \sin \frac{19\pi}{6}$	
4. $z_4 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$	

1	2	3	4

2. * Στα σχήματα της στήλης Α φαίνονται τόξα κύκλων στα οποία βρίσκεται η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε σχήμα της στήλης Α να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης Β.

	Στήλη Α	Στήλη Β
Α.		<p>1. $z = 2$, $\text{Im}(z) \leq 0$ και $\text{Re}(z) \leq 0$</p> <p>2. $z - 2 = 2$ και $\text{Im}(z) \geq 0$</p>
Β.		<p>3. $z = 2$ και $\text{Re}(z) \leq 0$</p> <p>4. $z + 2 = 2$ και $\text{Re}(z) < 0$</p>
Γ.		

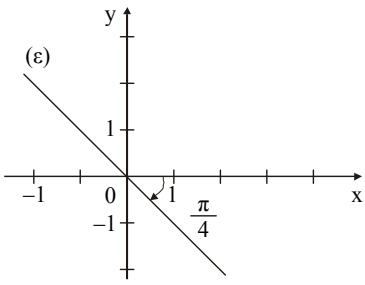
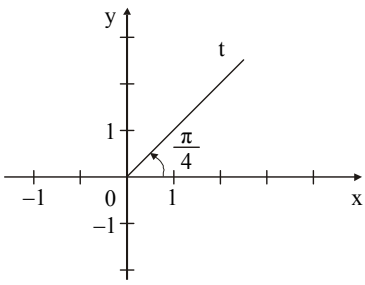
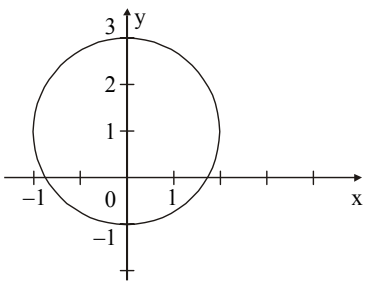
Α	Β	Γ

3. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο της στήλης Α να αντιστοιχεί στη σχέση που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
<i>γεωμετρική περιγραφή των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο</i>	<i>σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z</i>
<p>Α. κύκλος κέντρου $K(2, 1)$ και ακτίνας 3</p> <p>Β. μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα τα σημεία $(2, 0)$, $(0, -1)$</p> <p>Γ. κύκλος κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας 3</p>	<p>1. $z + 2 + i = 3$</p> <p>2. $z = 3$</p> <p>3. $z - 2 - i = 3$</p> <p>4. $z + 2 = z - i$</p> <p>5. $z - 2 = z + i$</p>

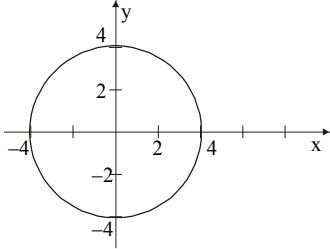
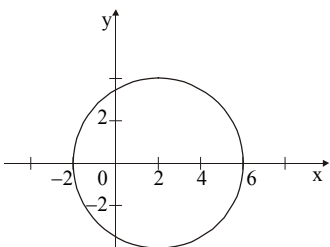
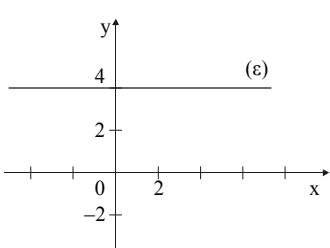
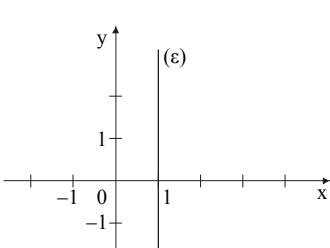
Α	Β	Γ

4. * Στη στήλη Α φαίνονται οι γραμμές στο μιγαδικό επίπεδο στις οποίες ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Να συμπληρώσετε τον πίνακα έτσι ώστε σε κάθε γραμμή της στήλης Α να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης Β.

	Στήλη Α	Στήλη Β
Α.		1) $ z - 3 = z + 3i $ 2) $ z - i = 2$
Β.		3) $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ 4) $\text{Arg}(z - 2i) = -\frac{\pi}{4}$
Γ.		5) $z = x(1 - i), x \in \mathbb{R}$

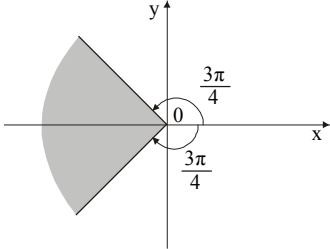
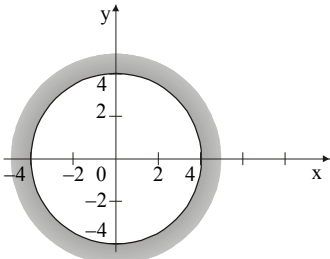
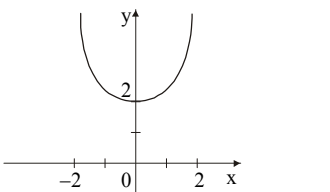
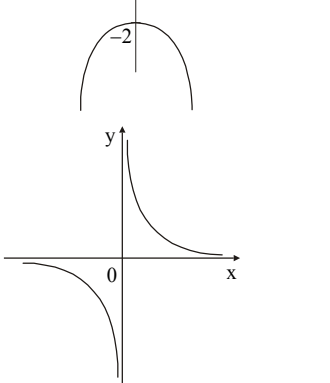
Α	Β	Γ

5. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα έτσι ώστε σε κάθε γραμμή της στήλης A να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης B.

	Στήλη A	Στήλη B
A.		1) $z - \bar{z} = 8i$ 2) $ z = 4$
B.		3) $ z - 2 = 4$ 4) $z + \bar{z} = 2$
Γ.		5) $z = -\bar{z}$
Δ.		

A	B	Γ	Δ

6. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα έτσι ώστε σε κάθε σχήμα της στήλης Α να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης Β.

Στήλη Α		Στήλη Β	
Α.		1) $\text{Re}(z) < 0, \text{Im}(z) \leq 0$ 2) $ z \geq 4$	
Β.		3) $ \text{Arg}(z) - \pi < \frac{\pi}{4}$	
Γ.		4) $\text{Re}(z^2) = -4$ 5) $\text{Im}(z^2) = 2$	
Δ.		6) $ z^2 - 1 = 2$	

Α	Β	Γ	Δ

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α) $x - 2 + 2yi = -2i + 2 - yi$

β) $y + 2i = 3 - (2 + i)x$

γ) $4y - 3yi - 2x = 2 - 5xi + 9i$

δ) $(x^2 + 1)i + 2x = x^2 - 2xi - 3$

2. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x^2 - x - 9i$ και $w = 2 - y^2i$, $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τους x, y ώστε $z = w$.

β) Να βρείτε τον z .

3. ** Αν $\theta \in [0, \pi]$ και $z = \sin^2\theta + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\eta\theta i$, να βρείτε το θ ώστε $z = 0$.

4. ** Δίνεται ο μιγαδικός $z = 6i - (3 - 4i)x - 3yi - (3i - 2)x + (4 - 2yi)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $a + \beta i$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $\operatorname{Re}(z) = 0$

ii) $\operatorname{Im}(z) = 0$

iii) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$

iv) $z = 0$

5. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (2 + i)x + (y - 1)i - 5$, $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να τον γράψετε στη μορφή $a + \beta i$.

β) Να γράψετε τον z συναρτήσει του x , αν $\operatorname{Im}(z) = 0$.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y , αν $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

6. ** Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $3i(-5i)$

β) $(2 + i)(-i + 3)$

γ) $\frac{3}{4i}$

δ) $\frac{1}{1-i}$

ε) $\frac{1-i}{-i+1}$

ζ) $\frac{(2+3i)(-i+1)}{1-2i}$

7. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 1 - i$ και $w = -3 + 2i$. Να γράψετε στη μορφή $a + bi$ τους παρακάτω μιγαδικούς:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \frac{1}{z} & \beta) \frac{w}{z} & \gamma) \frac{z+1}{i} \\ \delta) \frac{1}{z^2} & \epsilon) \frac{2i}{w+3} & \zeta) \frac{\bar{z}}{w} \end{array}$$

8. ** Να γράψετε στη μορφή $a + bi$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$\alpha) z = (1 + i + i^2 + i^3)^{100} \quad \beta) w = (2 - 3i)^2 - (2 + 3i)^2$$

9. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 3 + \sqrt{2}i$ και $w = \frac{1}{1-i}$. Να βρείτε:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \operatorname{Re}(z) & \beta) \operatorname{Re}(w) & \gamma) \operatorname{Im}(zw) \\ \delta) \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) & \epsilon) \operatorname{Im}\left(\frac{z}{w}\right) & \end{array}$$

10. ** Να γράψετε στη μορφή $a + bi$ τους μιγαδικούς αριθμούς:

$$\alpha) z_1 = \frac{5-2i}{1-2i} \quad \beta) z_2 = \frac{i-1}{i} - \frac{2}{(1-i)^2}$$

11. ** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a, β ώστε να ισχύει:

$$(\alpha + \beta i)^2 = \frac{12+5i}{i}.$$

12. ** Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = x + 2y - i \quad \text{και} \quad z_2 = 11 - (4x - y)i \quad \text{να είναι συζυγείς.}$$

13. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 5 + 8i$.

$$\alpha) \text{Να βρείτε τους } \bar{z}, -z \text{ και } \frac{1}{z}.$$

$$\beta) \text{Να βρείτε το άθροισμα } w = z + \bar{z} - z + \frac{1}{z}.$$

14. ** Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον z ώστε: $(2 - 3i)z + 5 + 9i = 0$.
15. ** Να βρείτε τον $z \in \mathbb{C}$ αν $(2 + 3i)z - 2 = (1 + 2i) + 2z + i$.
16. ** Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και ο αριθμός $w = (2i - z)(z + 6i)$ είναι πραγματικός, να δείξετε ότι $x = 0$ ή $y = -2$.
17. ** Να βρείτε όλους τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $\bar{z} = iz^2$.
18. ** Να βρείτε την τετραγωνική ρίζα του μιγαδικού αριθμού $z = -5 - 12i$.
19. ** Να βρείτε όλους τους ακεραίους $v \in \mathbb{N}$ για τους οποίους ισχύει $(1 + i)^v = (1 - i)^v$.
20. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι ισχύει: $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2)$, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους z_1, z_2 είναι πραγματικός.
21. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να γράψετε στη μορφή $a + \beta i$ τον μιγαδικό $w = \frac{z + 8i}{z + 6}$.
 - Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y , αν $\operatorname{Im}(w) = 0$.
 - Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y , αν $\operatorname{Re}(w) = 0$.
 - Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.
 - Να δείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
22. ** Η εξίσωση $z^2 + az + \beta = 0$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $2 - i$.
- Να βρείτε την άλλη ρίζα.
 - Να βρείτε τα a και β .

23. ** Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:
 $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.
24. ** Βρείτε τον $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, αν $z^2 + 2i\bar{z} - 6 = 0$.
25. ** Δίνεται ο μιγαδικός $z = (3 - 2x) + \frac{x}{x-1}i$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.
 α) Για ποιες τιμές του x , ο z είναι πραγματικός αριθμός;
 β) Για ποιες τιμές του x , ο z είναι φανταστικός αριθμός;
 γ) Υπάρχει τιμή του x ώστε $z = 0$;
26. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:
 α) $z = \frac{2+i}{1-3i}$ β) $z = \frac{(1-i)^2}{1+i} + 2 - 4i$
27. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:
 α) $z = \left(\frac{2+i}{1-3i}\right)^2$ β) $z = \left(\frac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)^v$
28. ** Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί την ισότητα $|z| + z = 2 + i$.
29. ** Αν $|z+9| = 3|z+1|$, αποδείξτε ότι $|z| = 3$.
30. ** Να γράψετε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|\operatorname{Re}(z)| = 3$ και $|\operatorname{Im}(z)| = 4$ ($| \cdot |$ απόλυτη τιμή). Πού βρίσκονται οι εικόνες των παραπάνω μιγαδικών αριθμών;

31. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε τα $\operatorname{Re}(w)$ και $\operatorname{Im}(w)$ του $w = \frac{2z-4}{z-i}$.
- β) Αν $w \in \mathbb{R}$, πού βρίσκονται οι εικόνες του στο μιγαδικό επίπεδο;
- γ) Αν w φανταστικός αριθμός, πού βρίσκονται οι εικόνες του στο μιγαδικό επίπεδο;
32. ** Αν $z = x + yi$, $y \neq 0$, να δείξετε ότι ο $w = \frac{z}{1+z^2}$, $1+z^2 \neq 0$ είναι πραγματικός αν $|z| = 1$.
33. ** Το άθροισμα τριών μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3 είναι μηδέν. Να βρείτε το κέντρο βάρους του τριγώνου που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών στο επίπεδο.
34. ** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη σχέση $2|z-1| = |z-4|$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας 2.
35. ** Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής την οποία ικανοποιούν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, αν ο αριθμός $w = \frac{z+2i}{z+1}$ είναι πραγματικός.
36. ** Ο μιγαδικός αριθμός z ικανοποιεί τις σχέσεις:
- $$-2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \quad (1)$$
- $$|\operatorname{Im}(z)| \leq 2 \quad (2)$$
- $$|z| \geq 2 \quad (3)$$
- Να γραμμοσκιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το χωρίο που αντιπροσωπεύει το σύνολο των εικόνων του z και να βρείτε το εμβαδόν του.
37. ** Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους αριθμούς:

$$\alpha) z_1 = (-1 + i)^3 \qquad \beta) z_2 = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} \right)^{12}$$

38. ** Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους αριθμούς:

$$\alpha) z_1 = 1 - \sqrt{3}i \qquad \beta) z_2 = 2 - 2i \qquad \gamma) z_1 \cdot z_2 \qquad \delta) \frac{z_2}{z_1}$$

και να υπολογίσετε το $\left(\frac{z_2}{z_1} \right)^6$.

39. ** Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 2 - 5i$ και $z_2 = 5 + 2i$.

α) Να παραστήσετε τις εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο.

β) Να βρείτε τα μέτρα τους.

γ) Να δείξετε ότι $z_2 = z_1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$.

δ) Να δείξετε ότι οι διανυσματικές ακτίνες των z_1 και z_2 τέμνονται κάθετα.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις εικόνες των z_1 , z_2 και την αρχή των αξόνων.

40. ** Αν $z_1 = \frac{1+5i}{3+2i}$ και $z_2 = -\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι αριθμοί:

$$\alpha) z_1 z_2 \qquad \beta) \frac{z_1}{z_2}$$

41. ** α) Αν $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$ και $z = x + yi$ να δείξετε ότι $x = \sqrt{3}y$.

β) Να βρείτε τον w αν $|w-1| = 1$ και $\text{Arg}(w-i) = 0$.

42. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \sqrt{3} + i$.
- Να βρείτε το $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Arg}(z)$.
 - Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.
 - Αν n θετικός ακέραιος να βρείτε τον $w = z^n$.
 - Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του n ώστε ο w να είναι πραγματικός.
 - Υπάρχει τιμή του n ώστε ο w να είναι φανταστικός;
43. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{1-i}{1+i}$.
- Να τον γράψετε στη μορφή $a + bi$.
 - Να βρείτε το $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Arg}z$.
 - Να τον γράψετε στην τριγωνομετρική του μορφή.
 - Να βρείτε τον $w = z^{19}$.
44. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τον $w = (1+i)z - 2i$ συναρτήσει των $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Αν $|w| = 2$, να δείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ ανήκουν σε κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα αυτού του κύκλου.
 - Να βρείτε τα σημεία τομής αυτού του κύκλου με την ευθεία $y = x$.
45. ** Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει:
- $|z - i| = 1$ και $\operatorname{Arg}z = \frac{\pi}{4}$
 - $3 \leq |z + i| \leq 4$
 - $|z - 1| = |z - 3| = |z - i|$

46. ** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(x, y)$ των μιγαδικών $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha) \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} \quad \beta) \operatorname{Arg}(z - 1) = \frac{\pi}{3} \quad \gamma) \operatorname{Arg}(z - 2i) = \frac{7\pi}{4}$$

47. ** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων $M(x, y)$ των μιγαδικών $z = x + yi$ για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha) \operatorname{Arg}(z - 2) = \frac{\pi}{4} \quad \beta) \operatorname{Arg}(z + 3) = \frac{3\pi}{4}$$

48. ** Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση: $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{\pi}{4}$.

49. ** Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$$\operatorname{Arg}(z - 1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad |z| = 13.$$

50. ** Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον $z = (1 + i)^{2\nu} + (1 - i)^{2\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι $z = 0$, αν ο ν είναι περιττός.

51. ** Για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύουν: $\operatorname{Arg}(z + 1) = \frac{\pi}{6}$ και $\operatorname{Arg}(z - 1) = \frac{2\pi}{3}$.

$$\text{Να δείξετε ότι } z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i).$$

52. ** Να γράψετε στη μορφή $x + yi$ τους μιγαδικούς:

$$\alpha) (\sqrt{3} + i)^4 \cdot (1 + \sqrt{3}i)^4 \quad \beta) \frac{(2 + 2\sqrt{3}i)^3}{(i-1)^2}$$

53. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

- Να βρείτε τα μέτρα τους.
- Να βρείτε το πρωτεύον όρισμά τους.
- Να τους γράψετε σε μια σειρά ώστε να προηγείται αυτός που έχει το μικρότερο όρισμα.
- Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;
- Να βρείτε το μιγαδικό z έτσι ώστε η εικόνα του $z \cdot z_5$ να συμπίπτει με την εικόνα του z_3 .

54. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}}i$$

$$z_4 = 5 - 5\sqrt{3}i \quad z_5 = 3 - 3\sqrt{3}i$$

- Να γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς στη μορφή $z = \kappa(1 - \sqrt{3}i)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
- Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;
- Να βρείτε τον μιγαδικό z έτσι ώστε η εικόνα του $z \cdot z_2$ να συμπίπτει με την εικόνα του z_3 .

55. ** Η εξίσωση $z + \alpha + i(z - 4) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει μια πραγματική λύση.

- Να βρείτε την τιμή του α .
- Να λύσετε την εξίσωση για την τιμή του α που βρήκατε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

56. ** Να λύσετε στο σύνολο \mathbb{C} τις εξισώσεις:

$$\alpha) z^4 = 81i \quad \beta) z^3 + i = 0 \quad \gamma) z^4 = 8 - 8\sqrt{3}i \quad \delta) z^2 = \sqrt{3} + i$$

57. ** Η εξίσωση $z^3 + \alpha z^2 + z + 5 = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον μιγαδικό $2 - i$. Να βρείτε όλες τις ρίζες της εξίσωσης.

58. ** α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$.
 β) Να λύσετε την εξίσωση: $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$.
 γ) Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία που είναι εικόνες των ριζών.
 δ) Τι είδους τρίγωνο σχηματίζουν οι εικόνες των ριζών; Να βρείτε το εμβαδόν του.
59. ** Να δείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 2 = 0$ και στη συνέχεια να βρείτε τις άλλες ρίζες της.
60. ** Να δείξετε ότι η εξίσωση $2 - \frac{1}{z} = \bar{z}$ έχει μια μόνο λύση, την $z = 1$.
61. ** α) Να γράψετε τον μιγαδικό $w = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ στη μορφή $a + bi$.
 β) Να βρείτε το μέτρο του και το πρωτεύον όρισμά του.
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$. (Δίνεται συν $\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$).
62. ** Δίνεται η εξίσωση $|z-1| = |z-3i|$, $z \in \mathbb{C}$.
 α) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος AB με άκρα A (1, 0) και B (0, 3).
 β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση της (ε) είναι $x - 3y + 4 = 0$.
 γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της (ε).
 δ) Να βρεθεί η εικόνα του z για τον οποίο το $|z|$ είναι ελάχιστο.
63. ** Δίνεται $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z + 8$.
 α) Να λύσετε την εξίσωση $P(z) = 0$ και να γράψετε τις ρίζες της σε τριγωνομετρική μορφή.
 β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τις εικόνες των ριζών της $P(z) = 0$.