

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**





Κεφάλαιο 2ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2.	Σ
3.	Σ
4.	Σ
5.	Σ
6.	Λ
7.	Λ
8.	Σ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Σ
12.	Λ
13.	Σ
14.	Σ

15.	Λ
16.	Σ
17.	Λ
18.	Σ
19.	Λ
20.	Λ
21.	Σ
22.	Σ
23.	Λ
24.	Λ
25.	Λ
26.	Λ
27.	Σ
28.	Λ

29.	Λ
30.	Σ
31.	Σ
32.	Σ
33.	Σ
34.	Λ
35.	Σ
36.	Σ
37.	Σ
38.	Σ
39.	Λ
40.	Σ
41.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	B
2.	Γ
3.	B
4.	B
5.	A
6.	Γ
7.	Δ
8.	Δ
9.	Γ
10.	B
11.	B
12.	E
13.	B
14.	Γ
15.	B
16.	E

17.	B
18.	Γ
19.	B
20.	B
21.	Γ
22.	Γ
23.	E
24.	Δ
25.	Δ
26.	B
27.	Γ
28.	Δ
29.	Γ
30.	Δ
31.	B
32.	Δ

33.	Γ
34.	A
35.	Γ
36.	E
37.	Γ
38.	Δ
39.	E
40.	B
41.	Δ
42.	Δ
43.	Δ
44.	Γ
45.	Γ
46.	Δ
47.	E

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	A
2	Θ
3	Z
4	Γ

2.

A	2
B	3
Γ	1

3.

A	3
B	5
Γ	2

4.

A	5
B	3
Γ	2

5.

A	2
B	3
Γ	1
Δ	4

6.

A	3
B	2
Γ	4
Δ	5

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) $x = 4, y = -\frac{2}{3}$ β) $x = -2, y = 7$
 γ) $x = 3, y = 2$ δ) $x = -1$

2. α) $x = 2, y = \pm 3$ ή $x = -1, y = \pm 3$ β) $z = 2 - 9i$

3. $\theta = \frac{\pi}{2}$

4. α) $z = (4 - x) + (6 + x - 5y)i$
 β) i) $x = 4$
 ii) $x = 5\lambda - 6, y = \lambda \in \mathbb{R}$
 iii) $x = \frac{5\mu - 2}{2}, y = \mu \in \mathbb{R}$
 iv) $x = 4, y = 2$

5. α) $z = (2x - 5) + (x + y - 1)i$ β) $z = 2x - 5$ γ) $y - x + 4 = 0$

6. α) 15 β) $7 + i$ γ) $-\frac{3}{4}i$
 δ) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ε) 1 ζ) $\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i$

$$7. \alpha) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \quad \beta) -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} i \quad \gamma) -1 - 2i$$

$$\delta) \frac{1}{2} i \quad \epsilon) 1 \quad \zeta) -\frac{5}{13} - \frac{1}{13} i$$

$$8. \alpha) 0 \quad \beta) -24i$$

$$9. \alpha) 3 \quad \beta) \frac{1}{2} \quad \gamma) \frac{3+\sqrt{2}}{2}$$

$$\delta) 3 + \sqrt{2} \quad \epsilon) -3 + \sqrt{2}$$

$$10. \alpha) \frac{9}{5} + \frac{8}{5} i \quad \beta) 1$$

$$11. \alpha = 3, \beta = -2 \quad \eta \quad \alpha = -3, \beta = 2$$

$$12. x = 1, y = 5$$

$$13. \alpha) 5 - 8i, -5 - 8i, \frac{5}{89} - \frac{8}{89} i \quad \beta) \frac{450}{89} - \frac{720}{89} i$$

$$14. z = \frac{17}{13} - \frac{33}{13} i$$

15. $z = 1 - i$

17. $i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

18. **α)** $2 - 3i, -2 + 3i$

19. $v = 4\lambda, \lambda \in \mathbb{N}$

20. $\beta = 0 \text{ ή } \delta = 0$

21. **α)** $w = \frac{x^2 + y^2 + 6x + 8y}{(x+6)^2 + y^2} + \frac{8x + 6y + 48}{(x+6)^2 + y^2} i$

β) $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} + 1 = 0$

γ) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

δ) $K(-3, -4), R = 5$

ε) $\mathbb{N} \cup i$

22. **α)** $2 + i$

β) $\alpha = -4, \beta = 5$

23. $-1, 1 + 2i, 1 - 2i$

24. $3 - i, -3 - i$

25. α) $x = 0$ β) $x = \frac{3}{2}$ γ) αδύνατο

26. α) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $\sqrt{26}$

27. α) $\frac{1}{2}$ β) 3^v

28. Αν $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε $\sqrt{x^2 + y^2} + x + yi = 2 + i \Leftrightarrow \dots z = \frac{3}{4} + i$

29. $|z + 9| = 3|z + 1| \Leftrightarrow |z + 9|^2 = 3^2 |z + 1|^2 \Leftrightarrow (z + 9)(\overline{z + 9}) = 9(z + 1)(\overline{z + 1}) \Leftrightarrow \dots$

30. $3 + 4i, -3 + 4i, 3 - 4i, -3 - 4i$
κύκλος $K(0, 0), R = 5$

31. α) $\operatorname{Re}(w) = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x - 2y}{x^2 + (y - 1)^2}, \operatorname{Im}(w) = \frac{2x + 4y - 4}{x^2 + (y - 1)^2}$

β) ευθεία $x + 2y - 2 = 0$

γ) κύκλος $(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$

33. Αν $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, $z_3 = x_3 + y_3i$ είναι

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \text{ Επειδή } z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow$$

... $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ και $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ έχουμε $G(0, 0)$, αρχή των αξόνων

34. $|z| = 2$, άρα $K(0, 0)$, $R = 2$

35. $w = \bar{w} \dots \Leftrightarrow 2x + y + 2 = 0$

36. $E = 16 - 4\pi$ τ.μ.

37. α) $z_1 = 2^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ β) $z_2 = \cos \pi + i \sin \pi$

38. α) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$ β) $z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$

γ) $z_1 z_2 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$

δ) $\frac{z_2}{z_1} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \quad \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^6 = 8i$

39. **β)** $|z_1| = |z_2| = \sqrt{29}$

δ) άμεση συνέπεια του (γ)

ε) $E = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{2} = \frac{29}{2}$ τ.μ.

40. **α)** $2 \left(\sigma\upsilon\nu \frac{19\pi}{12} + i\eta\mu \frac{19\pi}{12} \right)$

β) $\sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{12} + i\eta\mu \frac{11\pi}{12}$

41. **β)** $w = 1 + i$

42. **β)** $2 \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} + i\eta\mu \frac{\pi}{6} \right)$

γ) $2^v \left(\sigma\upsilon\nu \frac{v\pi}{6} + i\eta\mu \frac{v\pi}{6} \right)$

δ) $v = 6$

ε) $v = 3, 9, \dots$

43. **α)** $-i$

γ) $\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} + i\eta\mu \frac{3\pi}{2}$

δ) i

44. **α)** $x - y + (x + y - 2)i$

β) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

γ) $(0, 0), (2, 2)$

45. **α)** η εικόνα του $z = 1 + i$

γ) η εικόνα του $z = 2 + 2i$

46. **α)** $y = x, x > 0$

β) $y = \sqrt{3}(x - 1), x > 1$

γ) $y = -x + 2, x > 0$

47. **α)** $y = x - 2, x > 2$ **β)** $y = -x - 3, x < -3$

48. $z = x + yi, (x + 1)^2 + y^2 = 2, x < 0$

49. $z = \frac{1 + \sqrt{337}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{337}}{2} i$

51. $z = x + yi, z + 1 = x + 1 + yi$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{1}{2}, \text{ κ.λπ.}$$

52. **α)** 4^4 **β)** $-32i$

55. **α)** $\forall x \in \mathbb{R}$ λύση της εξίσωσης έχουμε $x + \alpha + i(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ και

$$x = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = -4$$

β) $z - 4 + i(z - 4) = 0 \Leftrightarrow (z - 4)(1 + i) = 0 \Leftrightarrow z = 4$

57. $\alpha = -3$, λύσεις $-1, 2 - i, 2 + i$

58. **α)** $P(z) = (z - 2i)(z + 2i)(z - 3)$

δ) 6 τ.μ.

59. Είναι $(1 + i)^4 - 3 \cdot (1 + i)^3 + 3 \cdot (1 + i)^2 - 2 = \dots = 0$. Επειδή η εξίσωση έχει πραγματικούς συντελεστές θα έχει ρίζα και τον $1 - i$. Θα έχουμε $[z - (1 + i)] [z - (1 - i)] \cdot P(z) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (z^2 - 2z + 2) P(z) = 0$
 $P(z) = (z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 2) : (z^2 - 2z + 2) \dots$ Ρίζες $1 + i, 1 - i, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

61. α) $\frac{\sqrt{3} - 1}{4} + \frac{\sqrt{3} + 1}{4}i$ β) $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 γ) $z_k = \sqrt[16]{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{12}}{8} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{12}}{8} \right)$

62. δ) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3y - 4)^2 + y^2} = \dots = \sqrt{10y^2 - 24y + 16}$

Το ελάχιστο του $f(y) = 10y^2 - 24y + 16$ είναι στο $y = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$

το $f\left(\frac{6}{5}\right) = \dots = \frac{8}{5}$, $|z|_{\min} = \sqrt{\frac{8}{5}}$

Για $y = \frac{6}{5}$ έχουμε $x - 3 \cdot \frac{6}{5} + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

Άρα $z = -\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$

63. α) $-2, 2i, -2i$ β) $x^2 + y^2 = 4$

