ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	**Λ**	**10. i)**	**Σ**	**19.**	**Σ**
2.	**Σ**	**10. ii)**	**Σ**	**20.**	**Σ**
3.	**Σ**	**11.**	**Σ**	**21.**	**Σ**
4.	**Σ**	**12.**	**Λ**	**22.**	**Λ**
5.	**Λ**	**13.**	**Σ**	**23.**	**Σ**
6.	**Σ**	**14.**	**Σ**	**24.**	**Λ**
7.	**Λ**	**15.**	**Σ**	**25.**	**Λ**
8.	**Σ**	**16.**	**Σ**	**26. i)**	**Λ**
9.	**Σ**	**17.**	**Λ**	**26. ii)**	**Λ**
		18.	**Λ**	**27.**	**Λ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Β**	**11.**	**Α**	**21.**	**Α**
2.	**Γ**	**12.**	**Ε**	**22.**	**Δ**
3.	**Δ**	**13.**	**Γ**	**23.**	**Β**
4.	**Γ**	**14.**	**Γ**	**24.**	**Γ**
5.	**Β**	**15.**	**Β**	**25.**	**Ε**
6.	**Δ**	**16.**	**Δ**	**26.**	**Δ**
7.	**Β**	**17.**	**Β**	**27.**	**Δ**
8.	**Ε**	**18.**	**Δ**	**28.**	**Δ**
9.	**Δ**	**19.**	**Β**	**29.**	**Ε**
10.	**Γ**	**20.**	**Β**	**30.**	**Β**

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

19. Στην ερώτηση αυτή δεν μπορούμε εύκολα να αποκλείσουμε κάποιες απαντήσεις. Ο στόχος της ερώτησης είναι να «θυμηθούμε» ότι δυο συμμετρικά σημεία ως προς τον y΄y θα έχουν συντεταγμένες (x, y) και (- x, y). Έτσι, αν στον τύπο $y = 1 - 2^x$ θέσουμε όπου x το - x, βρίσκουμε $y = 1 - 2^{-x}$ και η σωστή απάντηση είναι Β.

24. Εδώ θέλουμε να επισημάνουμε αφενός τη μονοτονία (και το 1-1) κάποιων γνωστών συναρτήσεων, αφετέρου την κατανόηση του ορισμού της 1-1 συνάρτησης. Όλες οι συναρτήσεις Α, Β, Δ, Ε προφανώς είναι 1-1, άρα αντιστρέφονται. Έτσι απομένει η Γ, η οποία δεν είναι αντιστρέψιμη.

27. Φαινομενικά η ερώτηση έχει πολλές πράξεις ή μπορεί να θεωρηθεί άσκηση ανάπτυξης, αφού πρέπει να βρεθεί η gof. Εκείνο όμως που θέλαμε να τονίσουμε μ’ αυτή την ερώτηση είναι ότι αν η πρώτη (με τη σειρά που γράφονται) συνάρτηση μιας σύνθεσης συναρτήσεων είναι σταθερή, τότε και η σύνθεση είναι σταθερή με την ίδια τιμή. Έτσι έχουμε (gof) (x) = g (f (x)) = 7.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	β
2	η
3	γ
4	γ
5	γ
6	δ
7	ε

2.

1	ε
2	γ
3	α
4	β

3.

1	γ
2	δ
3	ε
4	α

4.

1	β
2	α
3	ε
4	δ

5.

1	δ
2	ε
3	β
4	α

6.

1	γ
2	α
3	η
4	ζ

7.

1	γ
2	α
3	β
4	δ

8.

1	β
2	α
3	γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $g(x_1) < g(x_2) < g(x_3) < g(x_4) < f(x_4) < f(x_3) < f(x_2) < f(x_1)$

2. f, φ, h, g.

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

2. **α)** $D_f = (-1, 1)$

β) $\log \frac{1-x_1}{1+x_1} + \log \frac{1-x_2}{1+x_2} = \log\left(\frac{1-x_1}{1+x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\right) = \log \frac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2}$

$$\log \frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2} = \log \frac{1-\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}} = \log \frac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2}$$

3. **α)** Αν $x = y = 0$, τότε $f(0) + f(0) = 2f(0) + f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 3f(0)$, δηλαδή $f(0) = 0$

β) Αν $y = x$, τότε $f(2x) + f(0) = 2f(x) + f(x)$, άρα $f(2x) = 3f(x)$

Αν $y = -x$, τότε $f(0) + f(2x) = 2f(x) + f(-x)$, άρα $f(2x) = 2f(x) + f(-x)$, οπότε $3f(x) = 2f(x) + f(-x)$, δηλαδή $f(x) = f(-x)$

γ) i) $x > 0$, οπότε $f(|x|) = f(x)$

ii) $x < 0$, οπότε $f(|x|) = f(-x) = f(x)$, γιατί f άρτια

4. $p(x) = \sqrt{-x^2+8x-12}$, $x \in [2, 6]$

5. $F(x) = \begin{cases} x-9, & x \le -3 \\ -14x+9, & -3 < x < 2 \\ -20x+25, & x \ge 2 \end{cases}$

6. **α)** Μετατόπιση της C_f κατά 1 προς τα πάνω

β) Διπλασιασμός των τιμών της f

γ) Συμμετρική ως προς τον y΄y

δ) Τα τμήματα της C_f πάνω από τον x΄x και τα συμμετρικά όσων βρίσκονται κάτω από αυτόν.

7. Θεωρώ $x_1 > x_2$ και $(\frac{1}{f} + \frac{1}{g})(x_1) = \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{g(x_1)}$, αλλά $f(x_1) > f(x_2)$, γιατί f αύξουσα. Αφού $f(x_1)$, $f(x_2) > 0$, τότε θα ισχύει $\frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)}$. Όμοια $\frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{g(x_2)}$, οπότε $\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{g(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{g(x_2)} = (\frac{1}{f} + \frac{1}{g})(x_2)$.

Τελικά $(\frac{1}{f} + \frac{1}{g})(x_1) < (\frac{1}{f} + \frac{1}{g})(x_2)$, δηλαδή $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ φθίνουσα.

8. **α)** $Df = [-3, 3]$ **β)** $f(A) = [-2, 2]$

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 0$ ή $x = 3$, $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -1$, $f(x) = -2 \Leftrightarrow x = 1$

δ) $f(x) > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 0$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$, $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$, $f(x) < -2$ αδύνατη

ε) δεν είναι άρτια **ζ)** είναι περιττή **η)** δεν είναι 1 - 1

9. **α)** $\alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$, δηλαδή $(\alpha - 1)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $\alpha \in R$, άρα και για $\alpha > 0$

β) Εφαρμογή του (α) για x = α. Άρα, αφού $x + \frac{1}{x} \geq 2$, το 2 θα είναι το ελάχιστο. Αν $x + \frac{1}{x} = 2$, $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

11. α) Μετατόπιση της C_f κατά 1 προς τα πάνω

β) Συμμετρική ως προς τον x΄x

γ) Τα τμήματα πάνω από τον x΄x και τα συμμετρικά όσων βρίσκονται κάτω από αυτόν

12. α) $D_g = [-3, 1] \cup [3, 6]$ $\qquad$ $g(A) = [-3, -1] \cup [0, 2]$

β) $g(x) = \frac{2}{3}x - 2$ $\qquad$ **γ)** $x = -3$ και $x = 1$

δ) $[-3, -\frac{8}{3}) \cup (-1, 1]$ $\qquad$ **ii)** $x \in [3, 6]$

14. α) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-(x+2)^2}, & -4 \le x < 0 \\ \sqrt{4-(x+2)^2}, & 0 \le x \le 4 \end{cases}$

γιατί για $0 \le x \le 4$ ισχύει $(x-2)^2 + y^2 = 4$, δηλαδή $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

και για $-4 \le x \le 0$ ισχύει $(x+2)^2 + y^2 = 4$, δηλαδή $y = -\sqrt{4-(x+2)^2}$

β) $-4 \le x < -2$, f γνησίως φθίνουσα

$-2 \le x < 2$, f γνησίως αύξουσα

$2 \le x \le 4$, f γνησίως φθίνουσα $\qquad$ Ακρότατα $f_{min} = -2$ $\quad$ $f_{max} = 2$

15. $h(x) = x - 3$ $\quad$ $g(x) = \frac{5}{x} + 3x$

16. **α)** $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = x^2$

β) $g(x) = x^2 + 2$, $f(x) = 3x^3$

γ) $g(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, $f(x) = x^2$

δ) $g(x) = \dfrac{1}{x^\nu}$, $f(x) = \eta\mu x$

ε) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

17. **α)** $D_f = R - \{1\}$, $D_g = R - \{-1\}$

β) $(f + g)(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$, $(fg)(x) = \dfrac{1}{x+1}$

γ) $(gof)(x) = \dfrac{2 - x}{x}$, ενώ $(fg)(x) = \dfrac{1}{x+1}$

δ) δεν είναι ίσες.

18. **α)** $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$

β) *1ο σχήμα:* $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$, τότε $(fog)(x) = f(x + 2) = (x + 2)^2$

2ο σχήμα: $f(x) = x + 1$, $g(x) = e^x$, τότε $(fog)(x) = f(e^x) = e^x + 1$

3ο σχήμα: $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = x - 1$, τότε $(fog)(x) = f(x - 1) = \dfrac{1}{x}$

4ο σχήμα: $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \log x$, τότε $(fog)(x) = f(\log x) = 2\log x + 1$

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = x - 1$ **δ)** $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \log x$

19. Πρέπει $(fog)(x) = x$, δηλαδή $f(g(x)) = x$, δηλαδή $g(x) + 1 = x$, οπότε $g(x) = x - 1$

20. **α)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}$, άρα ο συντελεστής του x είναι $\frac{1}{\alpha}$ και ο σταθερός όρος $-\frac{\beta}{\alpha}$

β) $f^{-1}(x) = +\frac{1}{\alpha}x + \frac{\beta}{\alpha}$, άρα ο συντελεστής του x είναι $\frac{1}{\alpha}$ και ο σταθερός όρος $\frac{\beta}{\alpha}$

γ) $f^{-1}(x) + c = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha} + c$, άρα ο συντελεστής του x είναι $\frac{1}{\alpha}$ και ο σταθερός όρος $-\frac{\beta}{\alpha} + c$

21. **α)** $y = \frac{1-x}{1+x}$, οπότε $y(1 + x) = 1 - x$, δηλαδή $x = \frac{1-y}{1+y}$. Έχουμε λοιπόν $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$

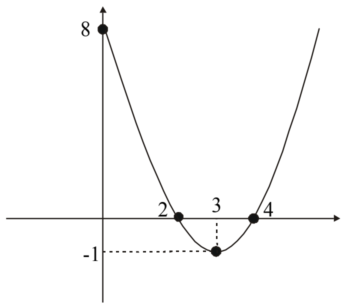
β) Η συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία y = x.

22. **α)** Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα f 1-1

β) $y = x + 3 \Leftrightarrow x = y - 3$, δηλαδή $f^{-1}(x) = x - 3$ $D_{f^{-1}} = R$

γ) $h(x) = (g o f^{-1})(x) = g(x - 3) = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$

δ)



ε) $h(A) = [-1, +\infty)$. Έχει ελάχιστο το -1 για $x = 3$

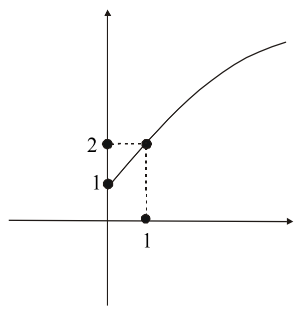
23. **α)** $y = 1 - x$, άρα $x = 1 - y$ με $1 - y \geq 1$, δηλαδή $y \leq 0$, οπότε $f(A) \subset Dg$, άρα $(gof)(x) = g(1 - x) = (1 - x)^2$

β) Έστω x_1, x_2 ανήκουν στο Dg με $x_1 > x_2$, τότε $-x_1 < -x_2$ και $1 - x_1 < 1 - x_2$, δηλαδή $(1 - x_1)^2 < (1 - x_2)^2$, οπότε η g είναι φθίνουσα

γ) $y = x^2 - 2x + 1$, δηλαδή $x^2 - 2x + 1 - y = 0$,

οπότε $x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{y}}{2} = 1 \pm \sqrt{y}$, δηλαδή

$(gof)^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x}$, $x \geq 0$



δ) $(gof)^{-1}(x) = x$ δηλαδή $1 + \sqrt{x} = x$, $x > 0$,

δηλαδή $x - \sqrt{x} - 1 = 0$.

Θέτω $z = \sqrt{x}$, οπότε $z^2 - z - 1 = 0$ και $z = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $\sqrt{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, άρα

$x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

24. **α)** μεταξύ 200 και 400 **β)** 300

γ) δεν έχει κέρδος **δ)** θα έχει τη μέγιστη ζημιά

25. **α)** Ισχύει $\dfrac{ΛΚ}{ΔΒ} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, δηλαδή $ΛΚ = \dfrac{x \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 2x$, $(ΔΒ = ΑΓ = \sqrt{2})$

$E(x) = \dfrac{ΛΚ \cdot x}{2} = \dfrac{2x \cdot x}{2} = x^2$, $0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Όμοια, αν $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, ισχύει $E(x) = 1 - (\sqrt{2} - x)^2$.

β) $E(0) = 0^2 = 0$, $E(\sqrt{2}) = 1 - (\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = 1$,

$E(1) = 1 - (\sqrt{2} - 1)^2 = -2 + 2\sqrt{2}$, $E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

26. α) $\dfrac{10}{x}$, $\dfrac{16}{x}$ **β)** εφω = $\dfrac{6x}{x^2+160}$

γ) $y = \dfrac{6x}{x^2+100} \Leftrightarrow yx^2 - 6x + 160y = 0$ άρα πρέπει $y^2 \le \dfrac{9}{160}$, άρα $y^2 = \dfrac{9}{160}$

για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{6}{2y} = \sqrt{160}$ μέτρα $\approx$ 12,6 m

27. α) $s(t) = \sqrt{60^2 \cdot t^2 + 80^2 \cdot t^2} = 100t$.

Άρα απομακρύνονται με ταχύτητα 100 km/h

β) $AM = \dfrac{s}{2} = 50t$

γ) Έστω ότι πρέπει να έχει ταχύτητα x km/h. Τότε $AM = \dfrac{s(t)}{2}$, άρα

$180 = \dfrac{\sqrt{60^2 \cdot t^2 + x^2 \cdot t^2}}{2}$. Για t = 4, έχουμε $\sqrt{x^2 + 3 \cdot 600} = 90$,

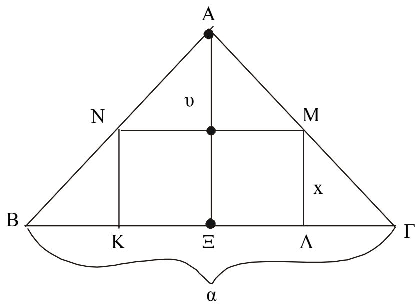
οπότε $x \approx 67$. Άρα ο δεύτερος πρέπει να ελαττώσει την ταχύτητά του κατά 13 km/h περίπου.

28. α) L = 2x + 2 (α - ΛΓ - ΒΚ). Ισχύει

$\dfrac{x}{\upsilon} = \dfrac{\Lambda\Gamma}{\Gamma\Xi}$ και $\dfrac{x}{\upsilon} = \dfrac{BK}{B\Xi}$, οπότε

$\Lambda\Gamma = \dfrac{x \cdot \Gamma\Xi}{\upsilon}$, $BK = \dfrac{x \cdot B\Xi}{\upsilon}$,

δηλαδή $\Lambda\Gamma + BK = \dfrac{x}{\upsilon}(\Gamma\Xi + B\Xi) = \dfrac{x}{\upsilon}\alpha$,



δηλαδή $L = 2x + 2\left(\alpha - \dfrac{x}{\upsilon}\alpha\right)$

β) $ΚΛ = α - (ΒΚ + ΛΓ) = α - \frac{x}{υ}α$, $Ε = ΚΛ \cdot x = (α - \frac{x}{υ}α)\, x = αx - \frac{αx^2}{υ} =$

$α\,(1 - \frac{x}{υ})\, x$

29. β) $f(x) = 20t - 5t^2$. Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2$, το οποίο είναι $f(2) = 20$

γ) Λύνουμε την εξίσωση $\frac{160}{9} = 20t - 5t^2$ και έχουμε $t_1 = \frac{8}{3}$ s και $t_2 = \frac{4}{3}$ s

δ) $υ(t) = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} = \frac{20t - 2t^2 - 40 + 20}{t - 2} = \frac{20t - 2t^2 - 20}{t - 2} =$

$\frac{-5t\,(t - 2) + 10\,(t - 2)}{t - 2} = -5t + 10$

30. α) Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η σύνθεση της $K(x)$ με την $N(t)$, δηλαδή: $K(t) = 15 + 800t - 40t^2$, t ακέραιος με $0 \leq t \leq 10$

β) $K(t) \leq 3.885$ και $0 \leq t \leq 10$, άρα $0 \leq t \leq 8{,}2$ ή $t \geq 11{,}8$, άρα $t = 8$

31. $E(x) = 10x^2$

32. α) $K(x) = x\,(70 - x) - 10\,(70 - x) = -x^2 + 80x - 700$

γ) Μέγιστο έχουμε, για $x = -\frac{β}{2α} = 40$, άρα η τιμή πώλησης θα πρέπει να είναι 40.000 δρχ.

33. Για $0 \le x \le 12$ είναι $f(x) = 1 \cdot x$, για $12 \le x \le 24$ είναι $f(x) = 12 + 10(x - 12)$,

οπότε $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 12 \\ 10x - 108, & 12 < x \le 24 \\ 40x - 828, & x > 24 \end{cases}$

34. **α)** $\Pi(3) = 0$, άρα $9 + 3\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$

$Z(4) = 0$, άρα $4\beta + 32 = 0 \Leftrightarrow \beta = -8$

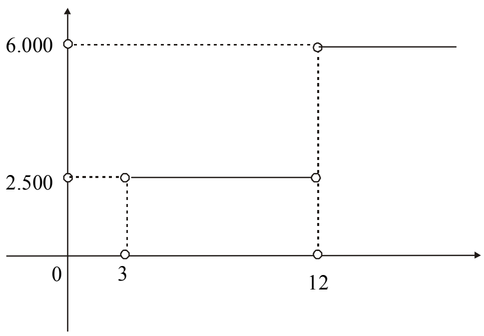
$\Pi(x) = x^2 - 2x - 3$ $\qquad Z(x) = -8x + 32$

Πρέπει $\Pi(x) = Z(x)$, άρα $x = 3{,}633$, δηλαδή 3.633 δρχ.

β) Πρέπει $Z(x) = 4\Pi(x)$, άρα $x^2 = 11$, δηλαδή $x = 3{,}316$ ή 3.316 δρχ.

35. **α)** $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 3 \\ 2500 & 3 \le x < 12 \\ 6000 & 12 \le x \end{cases}$

β)



36. **α)** $d = 10\eta\mu\kappa$ **β)** $h = 12 + d$ **γ)** $s = h \cdot \varepsilon\varphi 20°$