ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο: ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	Λ
2.	Λ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Λ
6.	Σ
7.	Σ
8.	Λ
9.	Σ
10.	Λ
11.	Λ
12.	Λ
13.	Λ
14.	Λ
15.	Σ
16.	Λ
17.	Σ

18.	Σ
19.	Λ
20.	Σ
21.	Σ
22.	Σ
23.	Σ
24.	Σ
25.	Σ
26. i)	Σ
26. ii)	Λ
27.	Σ
28.	Σ
29.	Λ
30.	Λ
31.	Λ
32.	Σ

33. i)	Σ
33. ii)	Σ
33. iii)	Λ
34.	Λ
35. i)	Σ
35. ii)	Λ
36.	Σ
37.	Σ
38.	Σ
39.	Σ
40. i)	Λ
40. ii)	Σ
41.	Λ
42.	Σ
43.	Σ
44.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Δ**	**11.**	**Γ**	**21.**	**Β**
2.	**Γ**	**12.**	**Β**	**22.**	**Γ**
3.	**Δ**	**13.**	**Α**	**23.**	**Δ**
4.	**Γ**	**14.**	**Δ**	**24.**	**Δ**
5.	**Δ**	**15.**	**Γ**	**25.**	**Ε**
6.	**Δ**	**16.**	**Γ**	**26.**	**Γ**
7.	**Β**	**17.**	**Δ**	**27.**	**Γ**
8.	**Β**	**18.**	**Δ**	**28.**	**Δ**
9.	**Γ**	**19.**	**Γ**	**29.**	**Ε**
10.	**Δ**	**20.**	**Γ**	**30.**	**Γ**

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

5. Η ερώτηση είναι απλή, αν ο μαθητής γνωρίζει την αντίστοιχη ιδιότητα της διπλής διάταξης. Αξίζει όμως να επισημανθεί στους μαθητές ότι δεν είναι απαραίτητη υπόθεση η ύπαρξη του ορίου της f (όπως στην απλή διάταξη). Μια παραλλαγή της ερώτηση θα μπορούσε να είναι
Β. $\lim\limits_{x\to 1} (f(x) - g(x) = 0$ (σωστό) και **Γ.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ (λάθος)

10. Ασυνήθιστη ερώτηση. Ο μαθητής μπορεί να απαντήσει αν έχει κατανοήσει την έννοια του ορίου. Θα πρέπει να ανακαλέσει στη μνήμη του ότι $|\eta\mu x| < |x|$, άρα αποκλείονται οι τιμές οι μεγαλύτερες ή ίσες του 0,025 (Α, Γ και Ε). Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$, άρα η τιμή θα είναι πολύ κοντά το 0,025. Μένει να είναι η Δ.

25. Έχουμε καθιερώσει στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής να είναι ένα μόνο σωστό (ή ένα μόνο λάθος). Από τη στιγμή λοιπόν που τα Α και Β είναι προφανές ότι ισχύουν, σωστή απάντηση είναι η Ε (χωρίς να εξεταστεί η αλήθεια ή όχι την Γ και Δ, κατ' ανάγκη).

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	δ
2	ζ
3	α
4	γ

2.

1	β
2	γ
3	δ
4	α

3.

1	ε
2	α
3	η
4	δ
5	γ

4.

1	α
2	δ
3	ε

5.

1	ε
2	γ
3	β
4	α

6.

1	ε
2	α
3	δ
4	γ

7.

1	γ
2	α
3	δ
4	ζ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) < \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) < \lim\limits_{x \to -\infty} s(x) < \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) < \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

2. γ, δ, α, ε, β.

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** 2 **β)** 0 **γ)** 2 **δ)** 3 **ε)** 1
στ) 2 **ζ)** 4

2. **α)** $D_f = [2, 4]$ **β)** 0 και $+\infty$

3. **α)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{\nu} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + ... + 1) = \nu$

β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-x)^{\nu} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left[-\dfrac{(1-x)^{\nu} - 1}{-x} \right] = \lim\limits_{x \to 0} \left[-\dfrac{(1-x)^{\nu} - 1}{(1-x) - 1} \right] = -\nu$

4. **α)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 3$

β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}\, \eta\mu x}{x} = 0$

γ) Πολλαπλασιασμός με τη συζυγή παράσταση: - 2

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ5x}{ημ7x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{ημ5x}{x}}{\dfrac{ημ7x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\dfrac{ημ5x}{5x}}{7\dfrac{ημ7x}{7x}} = \dfrac{5}{7}\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ7x}{7x}} = \dfrac{5}{7}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{εφ2x}{ημx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ημx\cdot συνx}{ημx\,(1-2ημ^2x)} = 2$

5. **α)** $1 + 2 + \ldots + ν = \dfrac{ν\,(ν+1)}{2} = 28$ άρα $ν = 7$

β) $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot ν = 120 \Rightarrow ν = 5$

6. Το πηλίκο τριωνύμων τα οποία έχουν κοινή ρίζα ρ έχει όριο, στο $x_0 = ρ$, πραγματικό αριθμό (εφόσον ο παρονομαστής δεν έχει διπλή ρίζα τον ρ).

7. $|f(x)-3| \le |x|$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-3| \le \lim\limits_{x\to 0}|x|$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)-3| \le 0$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$

Όμοια $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -4$, και συνεπώς:

α) $\lim\limits_{x\to 0}[f(x) + g(x)] = -1$

β) $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)] = 3\,(-4) = -12$

8. **γ)** πλευρικά όρια στο 0 **δ)** πλευρικά όρια στο 2 (δεν υπάρχει όριο).

9. **α)** $+\infty$

β) Μόνο πλευρικά όρια για την f (x) - g (x), και

επίσης $\lim\limits_{x\to 1}[h(x) - φ(x)] = 1$

10. **α)** συνεχής στο (0, 2), μη συνεχής στο [0, 2] **β)** συνεχής στο D_f
γ) μη συνεχής

12. **β)** $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim\limits_{h \to 0} ημ2h$, δηλαδή $f(x_0) = 0$

γ) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h)}{h \cdot ημ2h} \cdot ημ2h = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h)}{ημ2h} \cdot \dfrac{2ημ2h}{2h} = 2$

19. **α)** $+\infty$, $-\infty$, 2, 2 **β)** 0

20. **α)** $-\infty$ **β)** 0 **γ)** 0 **δ)** 0 **ε)** $+\infty$

21. **α)** 0 **β)** $+\infty$ **γ)** $-\infty$ **δ)** $-\infty$

22. **α)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (5^x - 7^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 5^x \left[1 - \left(\dfrac{7}{5}\right)^x\right] = -\infty$

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x - 3 \cdot 5^x}{5 \cdot 3^x + 2 \cdot 7^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\dfrac{3}{7}\right)^x - 3 \cdot \left(\dfrac{5}{7}\right)^x}{5 \cdot \left(\dfrac{3}{7}\right)^x + 2} = \dfrac{0}{2} = 0$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5^x - 8^x}{5 \cdot 3^x + 3 \cdot 7^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\dfrac{5}{8}\right)^x - 1}{5 \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^x + 3 \cdot \left(\dfrac{7}{8}\right)^x} = -\infty$

δ) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1-x^3}{|x|+2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{-x^3}{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2} = +\infty$

ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln \dfrac{x-1}{(x+1)^2} \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln \dfrac{1}{x} = -\infty$

23. **α)** 1 **β)** 0 **γ)** 0

24. **α)** $\kappa e^x + 1 \neq 0$, δηλαδή $e^x \neq -\dfrac{1}{\kappa} < 0$ το οποίο ισχύει πάντοτε. Άρα $Df = R$

β) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2\kappa}{\kappa e^x + 1} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2\kappa}{\kappa e^x + 1} = \dfrac{2\kappa}{1} = 2\kappa$

25. Έστω $ΑΓ = x$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} (ΒΓ - ΑΓ) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + c^2} - x) =$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+c^2} - x)(\sqrt{x^2+c^2} + x)}{\sqrt{x^2+c^2} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + c^2 - x^2}{\sqrt{x^2+c^2} + x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{c^2}{\sqrt{x^2+c^2} + x} = 0$$

26. $P(x) = x(x^\nu - 1) - (x - 1) = (x - 1)$ $Q(x)$ με $Q(0) = -1$, $Q(1) = \nu$

27. **α)** Σύνθεση συνεχών **β)** θεώρημα Bolzano για την $h(x)$ στο $[0, \dfrac{\alpha}{2}]$

28. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(1 - \ln x)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln^2 x\left(\dfrac{1}{\ln x} - 1\right)^2 = +\infty$

29. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2 - x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{e^{-\frac{x}{2}}}} = \dfrac{1}{2}$

30. Αν ΑΒ = α και ΑΜ = x τότε ΒΜ = x - α, $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{AM}{BM} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x - \alpha} = 1$,

31. α) Πρέπει x > 1. Η ευθεία ΑΜ : 2x + y (κ - 1) - 2κ = 0.

Για το σημείο Ν έχω τετμημένη x = 0, οπότε $y = \dfrac{2\kappa}{\kappa - 1}$.

Άρα $E_{MON} = \dfrac{OM \cdot ON}{2} = \dfrac{\kappa \cdot \dfrac{2\kappa}{\kappa - 1}}{2} = \dfrac{\kappa^2}{\kappa - 1}$

β) $\lim\limits_{\kappa\to+\infty} \dfrac{\kappa^2}{\kappa - 1} = \lim\limits_{\kappa\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{\kappa} - \dfrac{1}{\kappa^2}} = +\infty$

Το $\lim\limits_{\kappa\to 1} \dfrac{\kappa^2}{\kappa - 1} = +\infty$, επειδή κ > 0

32. α) Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\alpha - 1)\,x^2 + \beta x}{x^2 - 4} = 2$, δηλ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\alpha - 1)\,x^2}{x^2} = 2$,

οπότε α - 1 = 2 και α = 3

β) Βρίσκουμε το $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + \beta x}{x^2 - 4}$, $\beta \neq -4$. Αυτό είναι ίσο με : $\dfrac{8 + 2\beta}{0}$, $\beta \neq -4$.

Άρα το όριο είναι το $+\infty$.

35. α) Αν f (x) = 1, θα έχουμε $\sqrt{x^2 + (x+1)^2} = 1$, δηλ. $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$, δηλ. $2x^2 + 2x = 1$, συνεπώς x = 0 ή x = - 1

β) Ζητούμε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση $g(x) = x^2 + (x + 1)^2$ παρουσιάζει ελάχιστο. Ισχύει $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$ και το ζητούμενο x είναι το $-\dfrac{2}{2 \cdot 2} = -\dfrac{1}{2}$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} |x| \sqrt{2 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x \sqrt{2 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) \sqrt{2 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = +\infty$

δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 2x + 1 - 2x^2 - \frac{1}{2} - 2x}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2}\,(x + \frac{1}{2})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2}\,(2x + 1)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}\,(2 + \frac{1}{x})} = 0$$

36. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 8$

37. α) $f(x) = \begin{cases} 600, & 0 < x \leq 4 \\ 75x + 800, & x > 4 \end{cases}$

β) Η f (x) είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της εκτός από το σημείο $x_0 = 4$.

38. **α)** περίπου 58,6 χιλ. **β)** x = 36 **γ)** 0

39. **α)** $f(x) = \begin{cases} 400x + 9000, & 0 \le x \le 20 \\ 800x + 1000, & x > 20 \end{cases}$

40. **α)** σχήμα **β)** $\lim\limits_{t \to +\infty} \kappa(1 - e^{-t}) = \kappa$.

γ) Σε μεγάλης διάρκειας συνεχούς βροχόπτωσης η ταχύτητα της σταγόνας είναι περίπου ίση με κ.

41. **α)** $f(0) = e^{\frac{0}{2}+1} = e$ περίπου 2,718

β) $\lim\limits_{t \to 4^-} f(t) = e^3$, $\lim\limits_{t \to 4^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 4^+} \left(-\frac{1}{5}e^3 t + \frac{9}{5}e^3\right) = e^3$ περίπου 20,079

γ) $f(t) = 0$, δηλ. $-\frac{1}{5}e^3 t + \frac{9}{5}e^3 = 0$, άρα $e^3\left(-\frac{1}{5}t + \frac{9}{5}\right) = 0$ οπότε $t = 9$

δ) f (0) = 2,718 f (4) = 20,079, οπότε κάποια χρονική στιγμή t με t μεταξύ 0 και 4 θα έχουμε f (t) = 18,950. Επιπλέον, αν $-\frac{1}{5}e^3 t + \frac{9}{5}e^3 = 18{,}950$, τότε ... t περίπου 4,3.

42. **α)** $x_{1,2} = \dfrac{100 \pm \sqrt{10.000 - 256y^2}}{4y}$. Πρέπει $10.000 - 256y^2 \ge 0$

δηλ. $y^2 \le \dfrac{10000}{256}$ και $y < \dfrac{25}{4}$, οπότε x = 4.

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{100\,x}{2x^2 + 32} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{100}{x}}{2 + \dfrac{32}{x^2}} = 0$

43. Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{t \to +\infty} \left[\dfrac{\sqrt{t} + 10}{t^2 + 10} M_0 \right] = \lim\limits_{t \to +\infty} \left[M_0 \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{t^3}} + \dfrac{10}{t^2}}{1 + \dfrac{10}{t^2}} \right] = 0$.

44. $f(x) = \begin{cases} 75.000x & 0 < x \le 50 \\ 75.000 \cdot 50 + 70.000\,(x - 50) & 50 < x \le 70 \\ 68.000x & 70 < x \le 100 \end{cases}$

45. Πρέπει 2ln1 + 2α = - β και 3 = α + 1, άρα α = 2 και β = - 4

46. $\lim\limits_{t \to 0^+} E(t) = \ldots + \infty$

47. $\lim\limits_{t \to +\infty} K(t) = \ldots$ 2 χιλ. ΕΥΡΩ

48. $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = M$

49. $f(x) = \begin{cases} 9\pi, & 0 \le x \le 5 \\ 4\pi, & 5 < x \le 10 \\ \pi, & 10 < x \le 15 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1 \\ 2 + 3(x-1), & 1 \le x < 3 \\ 5 + 1(x-3), & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

51. α)

Αφήγηση	**Α**	**Β**	**Γ**
Διάγραμμα	I	III	IV

β) Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι και η εξής:

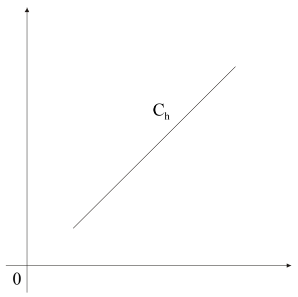
Μαθητής Δ (Διάγραμμα ΙΙ): *Ξεκίνησα βιαστικά όταν όμως κατάλαβα ότι έχω μπροστά μου πολύ χρόνο έκοψα ταχύτητα.*

Μαθητής Ε (Διάγραμμα V): *Μόλις βγήκα από το σπίτι πρόσεξα ότι είχα ένα λάστιχο κλαταρισμένο. Το επιδιόρθωσα και ξεκίνησα βιαστικά επιταχύνοντας.*

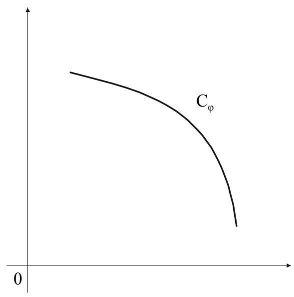
52. α)

Διάγραμμα	**I**	**II**	**III**
Συνάρτηση	σ (x)	f (x)	g (x)

β) Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι και η εξής:



Διάγραμμα IV



Διάγραμμα V

53. Μια τέτοια συνάρτηση θα μπορούσε να είναι η παρακάτω: