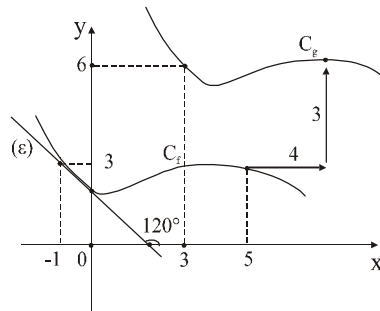


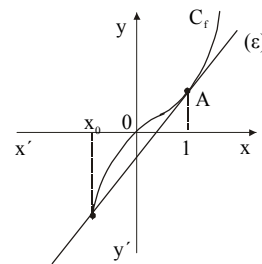
Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, f(0))$. Μετακινούμε τη C_f παράλληλα προς τους άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ονομάζουμε g τη συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί στη C_g .



- α) Να βρείτε μια σχέση η οποία να συνδέει τις συναρτήσεις f και g .
- β) Με βάση την προηγούμενη σχέση να δείξετε ότι $g'(x_0) = f'(x_0 - 4)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.
- γ) Να βρείτε την $g'(4)$.

2. ** Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^3$ και η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(1, 1)$ φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αν x_0 είναι το σημείο τομής των C_f και (ε) :

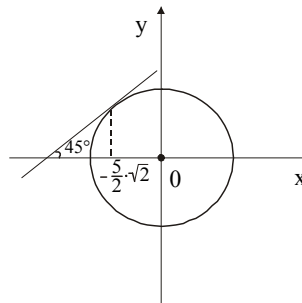


- α) να βρείτε το σημείο x_0 .
- β) να αποδείξετε ότι η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο x_0 είναι τετραπλάσια της κλίσης της εφαπτομένης της C_f στο A .

3. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι το πλησιέστερο σημείο της $C_f(x_0, f(x_0))$ στον άξονα x' είναι το σημείο της που έχει παράλληλη εφαπτομένη στον άξονα x' .
- β) Να βρείτε το x_0 και την ελάχιστη απόσταση.

4. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου του διπλανού σχήματος.



5. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = ax^2 + bx$. Να βρείτε τα a και b ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $(3, -9)$ και να έχει στο σημείο αυτό εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

6. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $(0, 1)$. Να παραστήσετε γραφικά την C_f και την (ε).

β) Με χρήση του ερωτήματος (α), να βρείτε μια προσέγγιση του αποτελέσματος $e^{-0,0135}$. Να συγκρίνετε την προσέγγιση που βρήκατε με το αποτέλεσμα που δίνει ένας υπολογιστής τσέπης.

Σημείωση: Η παραπάνω άσκηση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για μια εισαγωγή στην έννοια του διαφορικού.

7. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$.

α) Να εξετάσετε αν οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα με $x_0 = 1$, είναι κάθετες.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει το ίδιο για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

8. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = -\ln x$. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία στα οποία οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνουν τους άξονες, είναι κοινή τους εφαπτομένη.

9. ** Να βρεθούν οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της $f(x) = \sqrt{x}$, οι οποίες φέρονται από το σημείο $A(0, 1)$.
10. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Ποια γωνία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$;
11. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Να εξετάσετε αν η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη, αφού αποδείξετε ότι $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
12. ** Δίνεται η εξίσωση $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2}$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(8, 5)$.
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους άξονες.
13. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{2e} x^2$ και $g(x) = \ln x$, με $x > 0$.
- α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει x_0 ώστε $f'(x_0) = g'(x_0)$.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x_0) = g(x_0)$.
- γ) Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους στο σημείο αυτό.

14. ** Αν f_1, f_2, f_3, f_4 είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix}$,

να αποδείξετε ότι $f'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3'(x) & f_4'(x) \end{vmatrix}$.

15. ** Εξηγήστε γιατί η παρακάτω διαδικασία οδηγεί σε άτοπο

$$x^4 = x \cdot x^3 = \underbrace{x^3 + x^3 + x^3 + \dots + x^3}_{x \text{ προσθετέοι}}, \text{ άρα } (x^4)' = \left(\underbrace{x^3 + x^3 + \dots + x^3}_{x \text{ φορές}} \right)', \text{ δηλαδή}$$

$$4x^3 = \underbrace{3x^2 + 3x^2 + \dots + 3x^2}_{x \text{ φορές}}, \text{ άρα } 4x^3 = 3x^3, \text{ επομένως } 4 = 3 \quad !!!$$

16. ** Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = 3x^2 \ln x \quad \beta) g(x) = \sin \sqrt{x-2} \quad \gamma) h(t) = \frac{e^{-3t}}{2t}$$

17. ** Ο όγκος ενός κύβου αυξάνει με ρυθμό $1,5 \text{ cm}^3/\text{sec}$. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης της επιφάνειάς του όταν ο όγκος είναι 27 cm^3 .

$$\Deltaίνονται \quad \text{Όγκος κύβου πλευράς } a: V = a^3$$

$$\text{Εμβαδόν επιφάνειας κύβου πλευράς } a: E = 6a^2$$

18. ** Ένα σημείο κινείται σε άξονα και η θέση του τη χρονική στιγμή t καθορίζεται από τη συνάρτηση $s(t) = 3t^2 - t - 1$. Να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητά του κατά τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ sec}$

β) την επιτάχυνσή του κατά τη χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ sec}$

γ) πότε η ταχύτητα είναι 0.

19. ** Η θέση ενός κινητού που κινείται σε άξονα δίνεται από τη συνάρτηση $s(t) = \ln(t+1)$, $t \geq 0$ (ο χρόνος μετράται σε sec).

α) Δείξτε ότι η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.

β) Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας και της επιβράδυνσης του κινητού τη χρονική στιγμή $t_0 = 3$.

20. ** Έχει παρατηρηθεί ότι πίνοντας ένα αναψυκτικό με καλαμάκι, μια αναρρόφηση διαρκεί περίπου 1 sec και η ποσότητα του αναψυκτικού που καταναλώνεται κατά την αναρρόφηση είναι ίση με την ποσότητα που χωρά στο καλαμάκι. Το ποτήρι έχει διάμετρο 4 cm και το καλαμάκι έχει διάμετρο 0,4 cm και ύψος 25 cm.

Να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του αναψυκτικού στο ποτήρι σε κάθε αναρρόφηση.

Δίνεται ο όγκος κυλίνδρου ύψους h και ακτίνας βάσης r : $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

