

### Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. \*\* Για να υπολογίσει κάποιος την  $\sqrt{x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) χρησιμοποιεί για προσέγγιση τον αριθμό  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ , ενώ ένας άλλος τον αριθμό  $\frac{2x+1}{3}$ .
- α) Να εκτιμήσετε ποια από τις δύο προσεγγίσεις δίνει το ελάχιστο (απόλυτο) σφάλμα για τις τιμές του  $x$ :  
i) στο διάστημα  $[0,12 \ 0,13]$ ,  
ii) στο διάστημα  $[0,95 \ 1]$ .
- β) Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ,  $h(x) = \frac{2x+1}{3}$  και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α).
2. \*\* Δίνεται η συνάρτηση  $f(t) = \frac{5t^2 + 192}{2t^2 + 24}$  του πληθυσμού μιας πόλης σε χιλιάδες ως προς το χρόνο  $t$ .
- α) Να δείξετε ότι ο πληθυσμός θα μειώνεται, και όσο περνά ο χρόνος θα πλησιάζει τους 2.500 κατοίκους.
- β) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .
3. \*\* Το κόστος παραγωγής υλικού για την κατασκευή βάσεων κυλινδρικού δοχείου είναι 3 δρχ./cm<sup>2</sup>, ενώ για την κατασκευή της παράπλευρης επιφάνειας είναι 2 δρχ./cm<sup>2</sup>. Να βρείτε τη σχέση της ακτίνας της βάσης και του ύψους του κυλινδρικού δοχείου ώστε να έχουμε το ελάχιστο κόστος, με την προϋπόθεση ότι ο όγκος θα είναι σταθερός.

4. \*\* α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f(x) = x^4 + x^2 + 1$  και  $g(x) = f(x) \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  δέχονται κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο.
- β) Να εξετάσετε την ισχύ της παραπάνω πρότασης στη γενική περίπτωση που η  $f$  είναι τυχαία παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $f(x) > 0$  και  $g(x) = f(x) \eta\mu kx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
5. \*\* Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$  με τη βοήθεια των παραγώγων.
6. \*\* α) Να βρεθεί η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$  στο  $+\infty$ .
- β) Να δείξετε ότι οι τιμές της  $f(x)$  για  $x > 100$  προσεγγίζονται από την  $g(x) = x - 1$  με σφάλμα που δεν ξεπερνά το 0,01.
7. \*\* Ένα κινητό ξεκινά από σημείο A και κινείται ευθύγραμμα. Πέντε λεπτά μετά την εκκίνηση φτάνει στο σημείο B που απέχει 5 km από το A και σταματά. Ας υποθέσουμε ότι η απόσταση του κινητού από το A τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από μια τριτοβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση  $s(t)$ . Να βρεθούν:
- α) ο τύπος της  $s(t)$ .
- β) η μέγιστη ταχύτητα που ανέπτυξε το κινητό
- γ) τα διαστήματα στα οποία η κίνηση ήταν επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη.
8. \*\* Δίνεται η παραβολή με εξίσωση  $y = x^2$ . Ένα σημείο M ( $x, y$ ) κινείται πάνω στην παραβολή. Να βρεθεί η θέση του σημείου αυτού, όταν οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του είναι ίσοι.

9. \*\* Αν η συνάρτηση κόστους μιας επιχείρησης για ποσότητα παραγωγής  $q$  είναι  $C(q) = q^3 - 21q^2 + 53q + 1000$  και η συνάρτηση εσόδων είναι  $R(q) = -3q^2 + 20q + 1300$ , να προσδιοριστεί το μέγιστο κέρδος και οι τιμές του κόστους και των εσόδων που πραγματοποιείται το μέγιστο κέρδος.
10. \*\* Για ποιες τιμές του  $k$  η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + kx^2 + 1$  έχει σημείο καμπής για  $x = 1$ ;
11. \*\* Για ποια χορδή ΒΓ παράλληλη προς την εφαπτομένη ενός κύκλου  $\sigma'$  ένα σημείο του Α, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μέγιστο;
12. \*\* Είναι γνωστό ότι αν  $f, g$  δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα  $\Delta$  τότε  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ . Συχνά γίνεται το λάθος να εφαρμόζεται η ισότητα  $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$ . Είναι όμως η ισότητα αυτή πάντα λανθασμένη; Αν  $f(x) = e^{3x}$  να βρείτε μια μη μηδενική συνάρτηση  $g$  για την οποία να ισχύει  $(f \cdot g)' = f' \cdot g'$ .
13. \*\* Εξηγήστε γιατί η χρήση του κανόνα του L' Hospital δεν δίνει την πραγματική τιμή του ορίου:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2}{2x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3$   
(η πραγματική τιμή είναι  $-\frac{5}{3}$ ).
14. \*\* Η ενέργεια, που καταναλώνεται κατά την κίνηση σωματιδίου, δίνεται από τον τύπο  $E(v) = \frac{1}{v} [2(v - 35)^2 + 750]$ ,  $v > 0$ , όπου  $v$  είναι η ταχύτητα του σωματιδίου,  $v > 0$ .  
α) Να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το σωματίδιο ώστε να καταναλώνει την ελάχιστη ενέργεια.  
β) Πόση είναι η ελάχιστη αυτή ενέργεια;

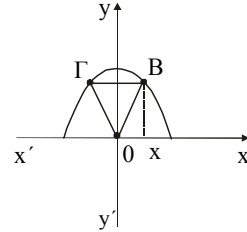
15. \*\* Στο σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση

$$y = \frac{1}{14}(48 - x^2), \text{ και το ισοσκελές τρίγωνο } O\Gamma\Gamma \text{ με}$$

$$OB = O\Gamma.$$

- α) Να βρείτε τα σημεία B, Γ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου OΓΓ γίνεται μέγιστο.

- β) Ποιο είναι αυτό το μέγιστο εμβαδόν;



16. \*\* Έστω  $f$  η συνάρτηση της ποσότητας κάποιας ουσίας στο αίμα, σε σχέση

με το χρόνο  $t$ . Αν ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  είναι ίσος με  $\frac{1}{t-2}$ ,  $t > 2$ :

- α) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ , αν ισχύει  $f(3) = 4$ .

- β) Μέχρι ποια χρονική στιγμή θα ισχύει  $f(t) > 1$ ;

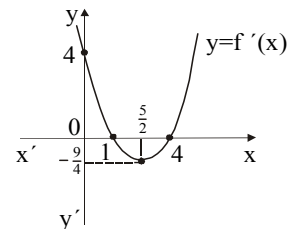
17. \*\* Έστω  $f(x) = x^2(3-x)$ , όπου η  $f$  μετρά την αντίδραση του οργανισμού σε ποσότητα  $x$  μιας ουσίας (αύξηση πίεσης, πτώση θερμοκρασίας σώματος κ.λπ.). Να βρείτε την τιμή του  $x$  για την οποία η αντίδραση έχει τη μέγιστη τιμή. Ποια είναι η μέγιστη τιμή;

18. \*\* Η γραφική παράσταση  $C_{f'}$  της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f$  είναι η παραβολή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- α) Να κατασκευάσετε πίνακα μονοτονίας της  $f$ .

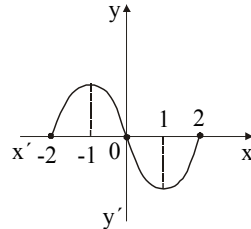
- β) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ , αν  $f(0) = 1$ .

- γ) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της  $f$ .



19. \*\* Η γραφική παράσταση  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$  είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να λυθούν:

- α)  $f'(x) = 0$       β)  $f'(x) < 0$       γ)  $f'(x) > 0$



20. \*\* Έστω η συνάρτηση  $f(x) = ax^2$ ,  $a > 0$ . Στο σημείο  $M$  της  $C_f$  με τετμημένη  $x_1 > 0$  φέρνουμε εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  που τέμνει τον  $x'$  στο  $T$ . Θεωρούμε τα σημεία  $P$ ,  $N$  πάνω στον  $x'$  ώστε  $MP \perp x'$  και  $MN \perp (\varepsilon)$ .

α) Να δείξετε ότι:

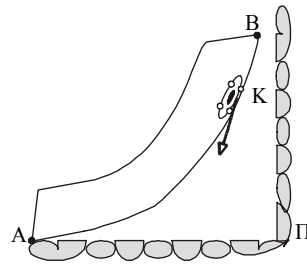
i)  $OP = 2TP$

ii)  $TP = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

iii)  $PN = f(x_1) \cdot f'(x_1)$     iv)  $TM = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \cdot \sqrt{1 + (f'(x_1))^2}$

β) Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση  $f(x) = e^x$  το  $TP$  είναι σταθερό. Για ποια εκθετική συνάρτηση ισχύει  $TP = \frac{1}{2}$ ;

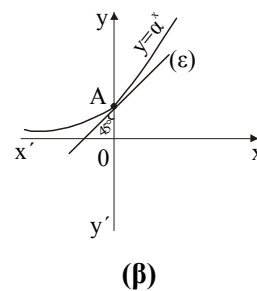
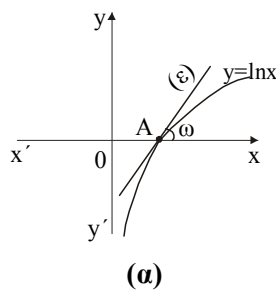
γ) Το κομμάτι  $AB$  της πίστας δοκιμών αυτοκινήτων που αναπτύσσουν μεγάλες ταχύτητες είναι τμήμα παραβολής με κορυφή στο  $A$ . Στο σημείο  $K$ , που απέχει 40 μέτρα από το προστατευτικό διάζωμα  $ΑΠ$ , το αυτοκίνητο  $K$  εκτρέπεται λόγω της πολύ μεγάλης ολισθη-



ρότητας, κινείται σχεδόν ευθύγραμμα κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης και προσκρούει στο διάζωμα  $ΑΠ$  σε απόσταση 8 μέτρα από το  $A$ . Ποια θα μπορούσε να είναι η εξίσωση του τμήματος  $AB$ ;

**Σημείωση:** Η προηγούμενη άσκηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν βάση για ανάπτυξη και άλλων ερωτημάτων όπως για παράδειγμα αν ισχύουν οι ίδιες σχέσεις και για παραβολή της μορφής  $y^2 = ax$  ( $y = \kappa\sqrt{x}$ ).

21. \*\* Στο σχήμα (α) να υπολογίσετε τη γωνία  $\omega$  και στο σχήμα (β) να υπολογίσετε τον αριθμό  $a$ . (Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η  $(\epsilon)$  είναι εφαπτομένη της  $C_f$ ).



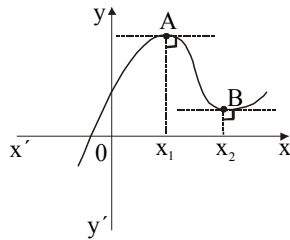
22. \*\* Ένα κέντρο έρευνας για την ασφάλεια των αυτοκινήτων εξετάζει το διάστημα  $s$  που διανύει ένα αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός θα διακρίνει ένα εμπόδιο μέχρι την ακινητοποίησή του. Οι ερευνητές κατέληξαν σε μια σχέση της μορφής  $3K \frac{ds}{dt} - e^t s^2 = 0$  όπου  $t$  ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που ο οδηγός αντιλαμβάνεται το εμπόδιο μέχρι να πατήσει το φρένο,  $K$  μια σταθερά που εξαρτάται από το μοντέλο και παριστάνει το διάστημα που θα διανύσει το αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός θα πατήσει φρένο μέχρι την ακινητοποίησή του (υποτίθεται ότι στην έρευνα χρησιμοποιήθηκε για όλα τα αυτοκίνητα ταχύτητα 80 km/h).
- α) Να βρείτε τη συνάρτηση  $s(t)$  χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη αρχική συνθήκη.
- β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

γ) Κάποιος γνωρίζει ότι ο χρόνος αντίδρασής του είναι 0,8 sec. Πόση απόσταση πρέπει να κρατά από ένα προπορευόμενο αμάξι όταν τρέχει με  $v = 80 \text{ km/h}$ ;

23. \*\* Ο W. Estes έχει ασχοληθεί με την καμπύλη εκμάθησης ενός πειραματόζωου. Το πειραματόζωο μέσα σε έναν ελεγχόμενο χώρο έπρεπε να επιλέξει τον κατάλληλο μοχλό ώστε να πάρει το φαγητό του. Με την πάροδο του χρόνου ο αριθμός των σωστών επιλογών  $r$  (σε μια εβδομάδα) βρέθηκε ότι δίνεται από τον τύπο  $r(t) = \frac{13}{1 + 25e^{-0,24t}}$  ( $t$  εβδομάδες εκπαίδευσης).
- α) Να εξετάσετε αν το πειραματόζωο θα βελτιώνει συνεχώς τις επιδόσεις του.
- β) Τι θα συμβεί αν το πείραμα συνεχιστεί για μεγάλο χρονικό διάστημα;
24. \*\* Ο υπολογιστής τσέπης για να υπολογίσει τις δυνάμεις του αριθμού  $e$ , δηλαδή τις τιμές του  $e^x$ , χρησιμοποιεί το άθροισμα  $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$  (στην ουσία χρησιμοποιεί πολύ περισσότερους προσθετέους).
- α) Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  η προσέγγιση του υπολογιστή είναι μικρότερη από την πραγματική τιμή του  $e^x$ .
- β) Να εξετάσετε αν η εξίσωση  $24e^x = 12x^2 + 4x^3 + x^4$ ,  $x \geq 0$  έχει λύση.
- γ) Να δείξετε ότι για ολοένα μεγαλύτερες τιμές του  $e^x$ ,  $x > 0$ , έχουμε ολοένα μεγαλύτερο σφάλμα.
25. \*\* Μια συνάρτηση  $f$  έχει  $f(0) = 1$  και  $f'(0) = 2$ . Να βρείτε προσεγγιστικές τιμές για τα  $f(0,1)$  και  $f(-0,05)$ .



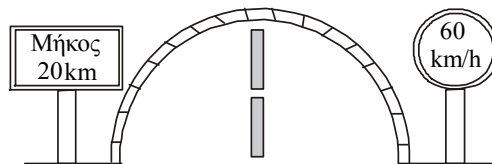
26. \*\* Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο  $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + \lambda$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ .



Να δείξετε ότι  $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$ .

27. \*\* Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + (x - 1000)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .
  - Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $1000^2$  και  $998^2 + 2^2$ .
  - Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f(x) = (x - \alpha)^v + x^v$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  και  $\alpha > 0$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ ,  $v = 2\rho$ .  
Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $10000^{100}$  και  $9000^{100} + 1000^{100}$ .
28. \*\* Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με πεδίο ορισμού το ανοικτό διάστημα  $\Delta$ . Να δείξετε ότι αν η  $h(x) = f(x) - g(x)$  έχει στο  $x_0 \in \Delta$  μέγιστο, τότε η  $f$  και η  $g$  έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο  $x_0 \in \Delta$ .

29. \*\* Το παρακάτω σχήμα παριστάνει την είσοδο μιας σήραγγας του εθνικού οδικού δικτύου. Όταν η κίνηση είναι αυξημένη παρατηρείται «μποτιλιάρισμα» των αυτοκινήτων στη σήραग्ga αυτή. Μια ομάδα συγκοινωνιολόγων μελέτησε τη ροή  $f$  των αυτοκινήτων για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και κατέληξε σε έναν τύπο ο οποίος εκφράζει τη ροή (πλήθος αυτοκινήτων / sec) σαν συνάρτηση της ταχύτητας  $v$  των αυτοκινήτων μέσα στη σήραग्ga. Ο τύπος είναι  $f(v) = \frac{22v}{v + \frac{v^2}{22} + 73}$ .



- α) Ποιες επεμβάσεις προτείνετε στη σήμανση που υπάρχει στην είσοδο της σήραγγας;
- β) Ποια είναι η μέγιστη δυνατή ροή αυτοκινήτων μέσα στη σήραग्ga;
30. \*\* Να αποδείξετε με τη βοήθεια των παραγώγων ότι οι συναρτήσεις  $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$  και  $g(x) = (e^x - e^{-x})^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , διαφέρουν κατά μία σταθερά. Να βρεθεί αυτή η σταθερά.
31. \*\* Η κατανάλωση ενός φορτηγού που τρέχει με σταθερή ταχύτητα  $v$  είναι  $1 + \frac{v^2}{300}$  lt πετρέλαιο την ώρα, το πετρέλαιο κοστίζει 150 δρχ. το lt και η αμοιβή του οδηγού είναι 4.000 δρχ. την ώρα. Να βρείτε την ταχύτητα του φορτηγού για να έχουμε το ελάχιστο δυνατό κόστος μεταφοράς, καθώς και τα έξοδα της μεταφοράς για μια απόσταση 500 km.