ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 2ο ΜΕΡΟΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ	21.	Λ	41.	Λ
2.	Σ	22.	Σ	42.	Λ
3.	Λ	23.	Σ	43.	Σ
4.	Σ	24.	Σ	44.	Σ
5.	Σ	25.	Σ	45.	Σ
6.	Σ	26.	Σ	46.	Λ
7.	Σ	27.	Σ	47.	Σ
8.	Σ	28.	Λ	48.	Σ
9.	Λ	29.	Σ	49.	Λ
10.	Λ	30.	Σ	50.	Λ
11.	Σ	31.	Λ	51.	Σ
12.	Σ	32.	Σ	52.	Λ
13.	Σ	33.	Λ	53.	Λ
14.	Λ	34.	Σ	54.	Λ
15.	Σ	35.	Σ	55.	Λ
16.	Λ	36.	Σ	56.	Σ
17.	Σ	37.	Λ	57.	Σ
18.	Σ	38.	Σ	58.	Σ
19.	Λ	39.	Σ	59.	Σ
20.	Λ	40.	Λ	60.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Γ**	**9.**	**Δ**	**19.**	**Β**
2.	**Δ**	**10.**	**Β**	**20.**	**Δ**
3.	**Ε**	**11.**	**Γ**	**21.**	**Γ**
4. α)	**Γ**	**12.**	**Ε**	**22.**	**Ε**
β)	**Β**	**13.**	**Ε**	**23.**	**Δ**
γ)	**Α**	**14.**	**Ε**	**24.**	**Ε**
5.	**Γ**	**15.**	**Γ**	**25.**	**Γ**
6.	**Α**	**16.**	**Δ**	**26.**	**Β**
7.	**Β**	**17.**	**Γ**	**27.**	**Δ**
8.	**Α**	**18.**	**Δ**	**28.**	**Β**

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

2. Πρέπει να εξηγήσουμε ότι οι συμβολισμοί $g'(2x)$ και $(g(2x))'$ είναι διαφορετικοί. Το $g'(2x)$ είναι η παράγωγος της g στο 2x, ενώ $(g(2x))' = g'(2x) \cdot (2x)' = 2g'(2x)$. Άρα η δοσμένη σχέση $f'(x) = g'(2x)$ δίνει $f'(x) = \frac{1}{2} 2g'(2x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(g(2x))' \Leftrightarrow f'(x) = (\frac{1}{2} g(2x))'$, άρα $f(x) = \frac{1}{2} g(2x) + c$ (απάντηση Α).

7. Εδώ θέλουμε από τη γραφική παράσταση της f, να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για την f'. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η f αλλάζει μονοτονία, άρα δεν μπορεί να είναι σωστή η Α, Γ και η Δ. Παρατηρώντας προσεκτικά το σχήμα βλέπουμε ότι αλλάζει δύο φορές μονοτονία, άρα έχει δύο ρίζες η f'. Έτσι σωστή είναι η Β.

16. Η υπόθεση $f''(x_0) \neq 0$ σημαίνει $f''(x_0) > 0$ ή $f''(x_0) < 0$. Στην πρώτη περίπτωση η f θα είχε ελάχιστο το x_0, δηλαδή ακρότατο. Στη δεύτερη περίπτωση θα είχε μέγιστο στο x_0, δηλαδή πάλι ακρότατο. Έτσι, σε κάθε περίπτωση έχει ακρότατο, χωρίς να ξέρουμε το είδος του ακροτάτου, συνεπώς σωστή είναι η Δ.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	γ
2	α
3	β

2.

1	ε
2	β
3	στ
4	α
5	γ

3.

1	δ
2	στ
3	β
4	γ

4.

1	δ
2	α
3	γ

5.

1	β
2	δ
3	α

6.

1	δ
2	α
3	β

7.

1	α
2	δ
3	β

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $-1 < -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0 < \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$

2. $\xi_1 = -\sqrt{\frac{7}{3}} < \xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} < \xi_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} < \xi_4 = \sqrt{\frac{7}{3}}$

3. $f'(x_2) < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f'(x_1)$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** Η συνάρτηση $f_1(x) = |\sqrt{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}|$ έχει σύνολο τιμών το $[0, \frac{1}{2}]$, ενώ η $f_2(x) = \sqrt{x} - \frac{2x+1}{3}$ μηδενίζεται κοντά στο $\frac{1}{8} = 0{,}125$. Άρα στο $[0{,}12 \quad 0{,}13]$ καλύτερη προσέγγιση δίνει η $\frac{2x+1}{3}$ ενώ στο $[0{,}95 \quad 1]$ η $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

β) Παρατηρήστε ότι η $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ είναι εφαπτομένη της C_f στο (1, 1)

2. **α)** $f'(t) < 0$ για $t > 0$ $\quad \lim_{t \to \infty} f(t) = 2{,}5$

β) $y = \frac{5}{2}$

3. Εμβαδόν βάσεων $2\pi\rho^2$, εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $2\pi\rho\cdot h$. Συνολικό κόστος $3\cdot 2\pi\rho^2 + 2\cdot 2\pi\rho h$ με όγκο $V = \pi\rho^2\cdot h$, άρα $h = \frac{V}{\pi\rho^2}$, οπότε το συνολικό κόστος $K(\rho) = 6\pi\rho^2 + \frac{4V}{\rho}$. Για $K'(\rho) = 0$ προκύπτει $12\pi\rho^3 - 4V = 0$, άρα $3\rho = h$

4. **α)** Αν x_0 η τετμημένη του κοινού σημείου τότε $f(x_0) = g(x_0)$, άρα $\eta\mu x_0 = 1$, $g'(x_0) = f'(x_0)\cdot\eta\mu x_0 + f(x_0)\cdot\sigma\upsilon\nu x_0$, όμως $\sigma\upsilon\nu x_0 = 0$, $\eta\mu x_0 = 1$, άρα $g'(x_0) = f'(x_0)$

β) Για τα κοινά σημεία $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = f(x)\,\eta\mu\kappa x$, άρα $\eta\mu\kappa x = 1$ και $g'(x) = f'(x)\,\eta\mu\kappa x + \kappa\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)$, άρα $g'(x) = f'(x)$ για $\eta\mu\kappa x = 1$

5. $f(x) = \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x$, οπότε $f'(x) = 0$

6. **α)** $y = x - 1$

β) Αν $\delta = \frac{x^2}{1+x} - (x - 1) = \frac{1}{1+x}$ ισχύει $\delta < 0{,}01$ για $x > 100$

7. **α)** $s'(t) = \upsilon(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ με $\upsilon(0) = 0$, $\upsilon(5) = 0$, άρα $\upsilon(t) = \alpha t^2 - 5\alpha t$ δηλαδή $s(t) = \frac{\alpha t^3}{3} - \frac{5\alpha t^2}{2} + c$ με $s(0) = 0$ και $s(5) = 5$. Άρα $\alpha = -\frac{6}{25}$

β) $\upsilon(2{,}5) = 90$

γ) στο $[0, \frac{5}{2}]$ επιταχ. στο $(\frac{5}{2}, 5]$ επιβραδ.

8. Αν Μ (x, y) σημείο της $y = x^2$ θέλουμε $(x^2)' = x'$, δηλαδή $2x = 1$, άρα $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$

9. $q = 11$ $c(11) = 373$ $R(11) = 1157$

10. $\kappa = -3$

11. Έστω Α $(-\rho, 0)$ το σημείο επαφής. Τότε το Β έχει συντεταγμένες $(x, \sqrt{\rho^2 - x^2})$, άρα $(AB\Gamma) = (\rho + x)\sqrt{\rho^2 - x^2} = f(x)$ $(-\rho \le x \le \rho)$.

$f'(x) = \frac{(\rho + x)(\rho - x)}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$ και όταν $x = \frac{\rho}{2}$, η f παρουσιάζει μέγιστο, άρα η ΒΓ πρέπει να απέχει $3\frac{\rho}{2}$ από το Α.

α) Αν ο κύκλος εφάπτεται στον y΄y στο Ο (0, 0), τότε αν Β (x, y), ΟΚ = x και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΔ το ΒΚ είναι ύψος, άρα $y^2 = BK^2 = OK \cdot K\Delta = x(2\rho - x)$, άρα $y = \sqrt{2\rho x - x^2}$, οπότε το εμβαδόν $E = x\sqrt{2\rho x - x^2} = f(x)$. Για την f (x) προκύπτει το ίδιο μέγιστο και αυτό αποτελεί ισχυρή ένδειξη ότι η θέση των αξόνων είναι ανεξάρτητη του αποτελέσματος.

β) Παρατηρούμε ότι στη θέση μεγίστου εμβαδού $B\Gamma = \sqrt{3}\rho$, άρα το τρίγωνο πρέπει να είναι ισόπλευρο. Το πρόβλημα της εγγραφής μέσα σε κύκλο τριγώνου με μέγιστο εμβαδό είναι ένα κλασικό γεωμετρικό πρόβλημα, του οποίου η αναλυτική αντιμετώπιση θα μπορούσε να είναι η προτεινόμενη παραπάνω.

12. $g(x) = ce^{\frac{3x}{2}}$

13. Στο δεύτερο βήμα δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος L' Hospital

14. **α)** $\upsilon = 40$ **β)** $E(40) = 20$ μονάδες ενέργειας

15. **α)** $E = \dfrac{48x - x^3}{14}$ $B\left(4, \dfrac{16}{7}\right)$ $\Gamma\left(-4, \dfrac{16}{7}\right)$

β) $E = \dfrac{64}{7}$

16. **α)** $f(t) = \ln(t - 2) + 4$ **β)** $t > 2 + e^{-3}$

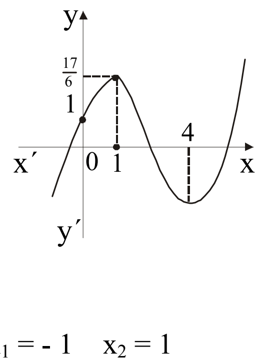
17. $x = 2$ $f(2) = 4$

18. **α)** $(-\infty, 1] \uparrow$, $(1, 4] \downarrow$ $(4, +\infty) \uparrow$

β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $f'(x) = x^2 - 5x + 4$,

άρα $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}x^2 + 4x + c$ και αφού $f(0) = 1$, άρα $c = 1$

γ)

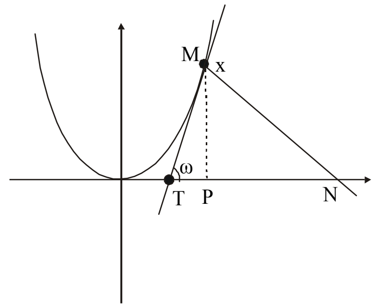


19. **α)** $x_1 = -1$ $x_2 = 1$ **β)** $-1 < x < 1$ **γ)** $-2 < x < -1$ ή $1 < x < 2$

20. α) i) $OP = x_1$, η (ε) έχει εξίσωση:

$y - \alpha x_1^2 = 2\alpha x_1 (x - x_1)$. Για $y = 0$ προκύπτει

$x = \dfrac{x_1}{2}$ (η τετμημένη του Τ), άρα $OP = 2TP$



ii) $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{MP}{TP}$, άρα $f'(x_1) = TP \cdot f(x_1)$

iii) Στο ΤΜΝ ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει $PN \cdot TP = MP^2$, άρα

$$PN = f^2(x_1) \cdot \frac{f'(x_1)}{f(x_1)}$$

iv) $\dfrac{TM}{MP} = \dfrac{MN}{PN}$, άρα $TM = \dfrac{MP \cdot MN}{PN}$ και $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2}$

β) $TP = 1$ για την e^x και αν $TP = \dfrac{1}{2}$ $\alpha = e^2$

γ) $AT = 8$ άρα το ΟΤ του (α) ερωτήματος είναι 8, δηλαδή $OP = 16$ επομένως $f(16) = 40$, δηλαδή $\alpha \cdot 16^2 = 40$, άρα η παραβολή έχει εξίσωση $y = \dfrac{40}{16^2} x^2$

21. α) $\varepsilon\varphi\omega = f'(1)$ με $f(x) = \ln x$, άρα $\varepsilon\varphi\omega = 1$ δηλαδή $\omega = 45°$

β) $\varepsilon\varphi 45° = f'(0)$ με $f(x) = \alpha^x$, άρα $1 = \alpha^{\circ} \cdot \ln\alpha$, δηλαδή $\alpha = e$

22. α) $\left(-\dfrac{1}{s(t)}\right)' = \left(\dfrac{e^t}{3\kappa}\right)'$. Άρα $s(t) = \dfrac{3\kappa}{-e^t + 4}$ αφού για $t = 0$ $s(t) = \kappa$.

Αυτό σημαίνει ότι ακόμη και αν ο οδηγός είχε μηδενικό χρόνο αντίδρασης (0 καθυστέρηση), το αυτοκίνητο θα διένυε διάστημα κ.

β) $s'(t) > 0$ άρα $s(t)$ ↑, δηλαδή μεγαλύτερος χρόνος αντίδρασης μεγαλύτερο διάστημα ακινητοποίησης

γ) $s(0,8) = 1{,}7κ$

23. **α)** $r'(t) > 0$, δηλαδή $r(t) \uparrow$

β) $\lim\limits_{t \to +\infty} r(t) = 13$

24. **α)** $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$, $x > 0$, τότε $f^{(3)}(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f^{(2)}(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f'(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f \uparrow$ με $f(x) > 0$

β) αδύνατη

γ) η f είναι $\uparrow$ και δίνει τη διαφορά του e^x από το άθροισμα

25. $(f(x) + Δx) - f(x) \approx f'(x)\,Δx$ για $x = 0$ και $Δx = 0{,}1$

$f(0,1) \approx 1{,}2$ ενώ με όμοιο τρόπο $f(-0{,}05) \approx 0{,}9$

26. Στα σημεία Α, Β οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς τον x΄x άρα τα x_1, x_2 είναι ρίζες της $f'(x) = 3x^2 + 2κx + 1$, όμως $x_1 \cdot x_2 = \frac{γ}{α} = \frac{1}{3}$

27. **α)** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 500$, άρα για $x < 500$ $f \downarrow$, ενώ για $x > 500$ $f \uparrow$

β) $f(1000) > f(998)$ από το (α) ερώτημα. Θα μπορούσαμε ακόμη να πούμε ότι $f(0) > f(2)$ και να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα: $1000^2 > 998^2 + 2^2$

γ) Παρατηρούμε ότι εδώ έχουμε μια γενίκευση των (α), (β) και $f'(x) = ν\,[(x - α)^{ν-1} + x^{ν-1}]$, μια προφανής ρίζα της f' είναι η $x_0 = \frac{α}{2}$ (αφού $ν = 2ρ$) που είναι μοναδική, αφού $f''(x) > 0$, άρα $f'(x) \uparrow$.

Η μονοτονία της f είναι: $f \downarrow$ στο $(-\infty, \frac{α}{2}]$ και $f \uparrow$ στο $(\frac{α}{2}, +\infty)$.

Για $α = 10.000$ και $ν = 100$ προκύπτει $f(10.000) > f(9.000)$

28. $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$, άρα παράλληλες εφαπτομένες

29. **α)** $f'(υ) = 0$ τότε $υ \approx 40$, άρα η σήμανση πρέπει να γίνει 40 km/h

β) $f(40) \approx 5$ αυτ/sec

30. $f'(x) = g'(x)$ άρα $f(x) = g(x) + c$ για $x = 0$ $c = 4$

31. Σε t ώρες έξοδα καυσίμου $150\left(1 + \frac{υ^2}{300}\right)t$, αφού θα κινηθεί επί $t = \frac{500}{υ}$.

Άρα θεωρούμε την $K(t) = 150\left(1 + \frac{υ^2}{300}\right)t + 4.000t$

Άρα $K(υ) = 150\left(1 + \frac{υ^2}{300}\right)\frac{500}{υ} + 4.000\,\frac{500}{υ}$

Βρίσκουμε $υ = \sqrt{8.300} \approx 91$ χιλ./ώρα και έξοδα $K(91) \approx 45.500$ δρχ.