

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** α) Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, να αποδείξετε ότι

$$\int_a^{\beta} (f(x) + f''(x)) \eta_{\mu x} dx = [f'(x) \eta_{\mu x}]_a^{\beta} - [f(x) \sigma_{\nu x}]_a^{\beta}.$$

β) Αν $f(x) = \eta_{\mu x}$, να αποδείξετε ότι $\int_a^{\beta} (f(x) + f''(x)) \eta_{\mu x} dx = 0$.

γ) Αν $f(x) = \sigma_{\nu x}$, να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \sigma_{\nu x} dx = 0$.

2. ** Για να εκτιμήσουν τη δυναμικότητα μιας πετρελαιοπηγής, οι μηχανικοί εκτελούν κάποιες βασικές μετρήσεις στην αρχική άντληση και αφού χρησιμοποιήσουν τα δεδομένα από παλαιότερες πετρελαιοπηγές, καταλήγουν σε μια συνάρτηση του χρόνου η οποία εκφράζει την αναμενόμενη παραγωγή ανά μήνα. Η συνάρτηση αυτή σε κάποια πετρελαιοπηγή είναι η: $L(t) = 3te^{-0,02t}$ δεκάδες χιλιάδες βαρέλια το μήνα, t μήνες μετά την έναρξη λειτουργίας της πηγής.

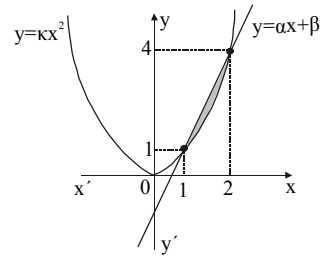
- α) Μετά από πόσα χρόνια η πετρελαιοπηγή θα αποδίδει τη μέγιστη ποσότητα πετρελαίου ανά μήνα;
β) Πόσα βαρέλια αναμένεται να αντληθούν συνολικά κατά τον πρώτο χρόνο λειτουργίας;
γ) Πόσα βαρέλια αναμένεται να αντληθούν συνολικά σε x μήνες λειτουργίας;
δ) Πώς θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε το συνολικό ποσό πετρελαίου που περιέχει η πηγή;

Σημείωση: Το ερώτημα (δ) θα μπορούσε να αποτελέσει θέμα διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη.

3. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, η οποία διέρχεται από τα σημεία (2, 4), (5, 7) και (6, 12).
- α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
- β) Να υπολογίσετε το $\int_2^6 f(x) dx$.
- γ) Να δείξετε ότι $\int_2^6 f(x) dx = \frac{2}{3} (f(2) + 4f(5) + f(6))$.
4. ** Σύμφωνα με στατιστικές μελέτες, το ποσοστό των ασθενών που εξακολουθούν να δέχονται ιατρική φροντίδα σε κάποιο ίδρυμα t μήνες μετά την πρώτη επίσκεψή τους, δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = e^{-t/20}$. Αν το ίδρυμα έχει αρχικά 300 ασθενείς και σχεδιάζει να δέχεται καινούριους με ρυθμό 10 το μήνα, να βρείτε μετά από 15 μήνες πόσους ασθενείς θα εξυπηρετεί συνολικά παρέχοντάς τους ιατρική στήριξη. (Το ποσοστό αναφέρεται στο σύνολο των ασθενών, όχι στους 100).
5. ** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή και ότι $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \eta\mu x dx = 0$.
- β) Να εξετάσετε την αλήθεια του ισχυρισμού: για κάθε περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ισχύει $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
6. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \geq 0$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, +\infty)$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $y'y$ και την εφαπτομένη της C_f στο M .

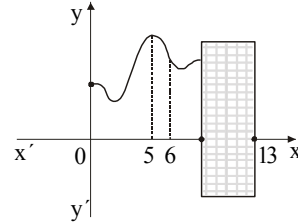
7. ** Ο ρυθμός μεταβολής των εξόδων μιας επιχείρησης δίνεται από τη συνάρτηση $E_{\xi}(t) = 3 + 2e^{-t}$ (σε εκατομμύρια δραχμές ανά μήνα). Ο ρυθμός μεταβολής των εσόδων δίνεται από τη συνάρτηση $E_{\sigma}(t) = \frac{1}{2} t^2$ (σε εκατομμύρια δραχμές ανά μήνα).
- α) Να αποδείξετε ότι μεταξύ 2ου και 3ου μήνα λειτουργίας ο ρυθμός μεταβολής των εξόδων θα είναι αριθμητικά ίσος με αυτόν των εσόδων.
- β) Να εκτιμήσετε τα συνολικά κέρδη από τη λειτουργία του πρώτου χρόνου.

8. ** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $y = kx^2$ και της ευθείας $y = ax + \beta$ με $a > 0$.
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις της παραβολής και της ευθείας.
- β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



9. ** Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = e^{-x}$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.
10. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2$, $g(x) = ax$, $a > 0$. Να βρεθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων να ισούται με $\frac{1}{3}$.

11. ** Ένα μέρος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει καλυφθεί από μια αδιαφανή ετικέτα. Η f είναι ορισμένη στο $[0, 13]$ και έχει παράγωγο οποιασδήποτε τάξεως. Να εκτιμήσετε τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων:



α) $\int_5^{12} f'(x) dx$ β) $\int_0^{13} f(x) dx$ γ) $\int_5^6 f''(x) dx$

Σημείωση: Η παραπάνω άσκηση αποτελεί θέμα για διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη. Τα ερωτήματα θα μπορούσαν να αναφέρονται και σε άλλα σημεία του διαστήματος $[0, 13]$ καθώς και σε ορισμένο ολοκλήρωμα της f''' .

12. ** α) Η συνεχής συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι γνησίως αύξουσα. Να δικαιολογήσετε γεωμετρικά τη σχέση:

$$(\beta - \alpha) f(\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

- β) Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[\alpha, \beta]$ και είναι γνησίως αύξουσα ποια θα είναι η αντίστοιχη σχέση;

γ) Αν $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$, να δείξετε ότι το I ανήκει στο διάστημα $(1, 1,21)$.

13. ** Η εφαπτομένη του διαγράμματος μιας συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x = \alpha$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με τετμημένη $x = \beta$ γωνία $\frac{\pi}{4}$. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, να υπολογίσετε

το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f''(x) dx$.

14. ** Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 12 ωρών η θερμοκρασία T σε βαθμούς C τη χρονική στιγμή t (μετρημένη σε ώρες από την αρχή της περιόδου) είναι $T(t) = 25 + 0,3t - 0,05t^3$.

α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η θερμοκρασία γίνεται μέγιστη.

β) Ποια είναι η μέγιστη θερμοκρασία;

γ) Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία κατά τη διάρκεια της περιόδου.

15. ** Αν η συνάρτηση f , που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, στρέφει τα κοίλα άνω και είναι γνησίως αύξουσα, να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης:

$$\int_a^b f''(x) dx + \int_a^b f'(x) dx$$

16. ** Θεωρείται γνωστό ότι ο ρυθμός με τον οποίο διαδίδεται μια είδηση σε μια πόλη με συνολικό πληθυσμό A είναι ανάλογος του αριθμού των κατοίκων που δεν γνωρίζουν την είδηση. Να εκφράσετε τον αριθμό των κατοίκων που έχουν πληροφορηθεί την είδηση ως συνάρτηση του χρόνου t .

17. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι προφανώς

ορισμένη σε όλο το R και παίρνει θετικές τιμές ή μηδέν. Υπολογίζουμε το

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2 < 0. \text{ Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού } f(x) \geq 0.$$

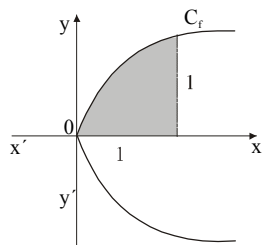
Πού βρίσκεται το λάθος;

18. ** Θέλουμε να υπολογίσουμε το $I = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\sin 2x}{2}} dx$. Γράφουμε:

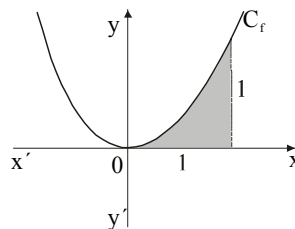
$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2 x}{2}} = \int_0^{\pi} \sin x dx = 0. \text{ Όμως η συνάρτηση } f(x) = \sqrt{\frac{1+\sin 2x}{2}}$$

είναι μη αρνητική στο διάστημα $[0, \pi]$, άρα δεν μπορεί να μηδενιστεί το I . Πού βρίσκεται το λάθος;

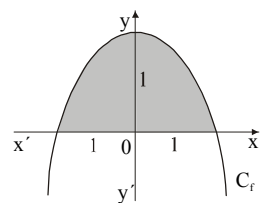
19. ** Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η καμπύλη C_f είναι παραβολή. Να υπολογίσετε τα σκιασμένα εμβαδά.



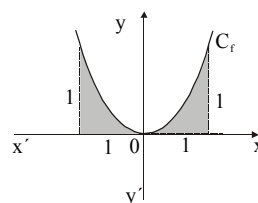
A



B



Γ



Δ

20. ** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\int_0^{\pi} \eta\mu 2x dx = 0$

β) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{9\pi}{2}$

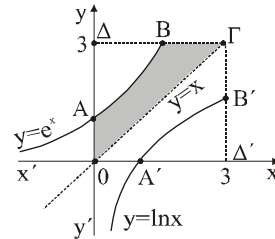
γ) $\int_1^2 (2x+1) dx = 4$

δ) $\int_{1/2}^5 \ln x dx < \int_1^5 \ln x dx$

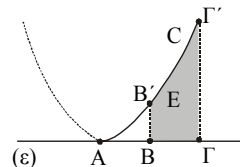
21. ** α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $A'B'\Delta'$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

Σημείωση: Η άσκηση αποτελεί δείγμα τροποποίησης της άσκησης 6 στη σελίδα 350 του σχολικού βιβλίου Θετικής Κατεύθυνσης.



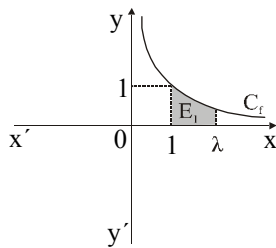
22. ** α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$ είναι ίση με $\frac{1}{3}(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$.



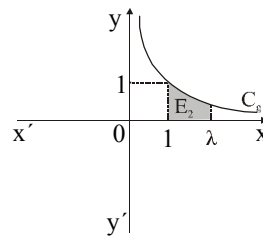
β) Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιος ώστε $\xi^2 = \frac{1}{3}(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$.

23. ** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και

$$g(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0.$$



A



B

α) Να βρείτε τα εμβαδά E_1 και E_2 .

β) Να βρείτε τα όρια: $I_1 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda f(x) dx$ και $I_2 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda g(x) dx$.

24. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.
- Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.
 - Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 2$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.
 - Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα $x'x$ που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
25. ** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν $f(x) = x^2 f'(x)$ και $f(1) = \frac{2004}{e}$.
- Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 2004 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.
26. ** Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^x$.
- Να βρείτε μια άρτια συνάρτηση f και μια περιττή συνάρτηση g στο \mathbb{R} , τέτοιες ώστε $f(x) + g(x) = h(x)$.
 - Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα των f, g .
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \lambda > 1$.
 - Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

