ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 4ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	**Σ**
2.	**Σ**
3.	**Λ**
4.	**Σ**
5.	**Λ**
6.	**Σ**
7.	**Λ**
8.	**Λ**
9.	**Σ**
10.	**Λ**
11.	**Σ**
12.	**Σ**

13.	**Λ**
14.	**Σ**
15.	**Σ**
16.	**Λ**
17.	**Σ**
18.	**Σ**
19.	**Λ**
20.	**Σ**
21.	**Σ**
22.	**Σ**
23.	**Λ**
24.	**Σ**

25.	**Σ**
26.	**Σ**
27.	**Σ**
28.	**Λ**
29.	**Σ**
30.	**Λ**
31.	**Σ**
32.	**Σ**
33.	**Σ**
34.	**Σ**
35.	**Σ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Δ**
2.	**Ε**
3.	**Γ**
4.	**Γ**
5.	**Γ**
6.	**Α**
7.	**Δ**
8.	**Β**

9.	**Ε**
10.	**Ε**
11.	**Β**
12.	**Α**
13.	**Γ**
14.	**Β**
15.	**Δ**
16.	**Γ**

17.	**Δ**
18.	**Γ**
19.	**Δ**
20.	**Δ**
21.	**Δ**
22.	**Α**
23.	**Α**

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

7. Η ερώτηση έχει τεθεί για να αρθεί η παρανόηση που υπάρχει σε πολλούς μαθητές ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει μόνο όταν $\alpha < \beta < \gamma$. Το σωστό είναι ότι ισχύει πάντα, εφόσον τα α, β, γ ανήκουν σε διάστημα. Έτσι σωστή απάντηση είναι η Δ.

9. Είναι $\mu = \dfrac{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx}{(+1)-(-2)} = \dfrac{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx}{2}$, αλλά το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ παριστάνει το εμβαδόν του ημικυκλίου, που ισούται με $\dfrac{\pi}{2}$, άρα με $\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, οπότε ισχύει το Ε (ας μην περιφρονούμε τη διάταξη των αριθμών).

14. Σκόπιμα δεν δίνονται στο σχήμα ποια είναι η C_f και ποια είναι η C_g. Πρέπει ο μαθητής να μπορεί να διαπιστώσει ότι στο διάστημα $[0, 1]$ είναι $x^2 \geq x^3$, οπότε απαντά εύκολα Β.

20. Δεν πρέπει ο μαθητής να «αθροίσει» τα δύο εμβαδά. Ισχύει $\int_{0}^{x_0} f(x)\,dx = E_1$ και $-\int_{0}^{4} f(x)\,dx = E_2$, άρα $\int_{x_0}^{4} f(x)\,dx = -E_2$, άρα $\int_{0}^{4} f(x)\,dx = E_1 - E_2 =$ 1,375. Σωστή απάντηση η Δ.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	η
2	ε
3	α
4	γ
5	β

2.

1	δ
2	ζ
3	β
4	η
5	γ

3.

1	β
2	ε
3	α
4	γ

4.

1	δ
2	α
3	ε

5.

1	γ
2	ε
3	β

6.

1	α
2	γ
3	δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $E_2 < E_1 < E_3$

2. $\mu_\varphi < \mu_h < \mu_g < \mu_f$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Παραγοντική ολοκλήρωση

2. **α)** $L'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 50$ μήνες

β) $\int_0^{12} 3t \cdot e^{-0,02t}\, dt \approx 184$ δεκάδες χιλιάδες βαρέλια

γ) $\int_0^{x} 3t \cdot e^{-0,02t}\, dt$

δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{x} 3t \cdot e^{-0,02t}\, dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \left([-150x \cdot e^{-0,02t}]_0^x + [-7500e^{-0,02t}]_0^x \right) =$

7.500 δεκάδες χιλιάδες βαρέλια

3. **α)** Πρέπει $f(2) = 4$, $f(5) = 7$, $f(6, 12)$, άρα $f(x) = x^2 - 6x + 12$

β) $\int_2^{6} f(x)\, dx = 484$

γ) $\frac{2}{3}\, (f(2) + 4f(5) + f(6) = 484$

4. Επειδή το ποσοστό των ασθενών μετά από 15 μήνες είναι $f(15)$ και ο ρυθμός μεταβολής των νέων ασθενών που εξακολουθούν να δέχονται ιατρική φροντίδα t μήνες μετά την εισαγωγή τους είναι $10 \cdot f(15 - t)$, άρα μετά από 15 μήνες θα εξυπηρετεί $300 \cdot f(15) + \int_0^{15} f(10 - t)\, dt = \ldots = 247$ ασθενείς

5. α) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} ημx\, dx = [-συνx]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$

β) $\int_{-α}^{α} f(x)\, dx = \int_{-α}^{0} f(x)\, dx + \int_{α}^{0} f(x)\, dx$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_{-α}^{0} f(x)\, dx = -\int_{α}^{0} f(x)\, dx$ που προκύπτει, αν όπου x θέσουμε - u

6. α) Αρκεί $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

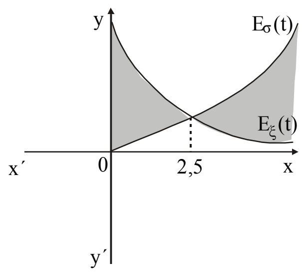
β) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

γ) Επειδή η f στρέφει τα κοίλα άνω για κάθε $x > 0$, τότε $f(x) > y$ για κάθε $x > 0$, άρα $E = \int_{0}^{1} (f(x) - y)\, dx = \ldots$

7. α) $E_σ(2) - E_ξ(2) < 0$, ενώ $E_σ(3) - E_ξ(3) > 0$

β) Θεωρούμε σαν σημείο τομής αυτό με τετμημένη 2, 5 (αν και είναι περιττό). Γενικά αν K το συνολικό κέρδος, ισχύει:

$K = \int_{0}^{12} [E_σ(t) - E_ξ(t)]\, dt$



8. α) Η ευθεία περνά από τα σημεία (2, 4) και (1, 1), άρα έχει εξίσωση $y = 3x - 2$ και η παραβολή περνά από το σημείο (1, 1), άρα έχει εξίσωση $y = x^2$

β) $E = \int_{1}^{2} (3x - 2 - x^2)\, dx$

9. $V = \int_0^1 \pi (e^{-x})\, dx \approx 1{,}36$

10. Οι συναρτήσεις πρέπει να τέμνονται στα σημεία Ο (0, 0) και Α (1, 1) για κάθε $\alpha \in R$, για να υπάρχει περιορισμένο χωρίο.

Άρα $E = \int_0^1 (\alpha x - \alpha x^2)\, dx = \ldots = \frac{\alpha}{6}$, άρα $\frac{\alpha}{6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = 2$

11. **α)** $\int_5^{12} f'(x)\, dx = f(12) - f(5) < 0$, αφού $f(5)$ η μέγιστη τιμή

β) $\int_0^{13} f(x)\, dx > 0$, αφού το εμβαδόν της ετικέτας κάτω από τον x΄x είναι αρκετά μικρότερο από αυτό που φαίνεται να βρίσκεται πάνω από τον x΄x

γ) $\int_5^{6} f''(x)\, dx = f'(6) - f'(5)$ όμως $f'(5) = 0$ και $f'(6) < 0$, αφού στο σημείο αυτό η καμπύλη «κατέρχεται».

12. **α)** $(\beta - \alpha)\, f(\alpha)$ = εμβαδόν ορθογωνίου, $(\beta - \alpha)\, \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$ = εμβαδόν τραπεζίου

β) $(\beta - \alpha) \left(\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \right) \le \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \le (\beta - \alpha)\, f(\beta)$

γ) $f \uparrow$ και $f''(x) > 0$ άρα $1 < I < \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$

13. $\int_\alpha^\beta f''(x)\, dx = f'(\beta) - f'(\alpha) = \varepsilon\varphi\, \frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi\, \frac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3}$

14. **α)** $T'(t) = 0$, άρα $t_0 = \sqrt{2}$

β) $T(\sqrt{2})$

γ) Για διακριτά ποσά η μέση τιμή έχει τη μορφή $\frac{1}{\nu}$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)$. Για συνεχείς μεταβολές (όπως είναι η μεταβολή του χρόνου) η αντίστοιχη σχέση θα είναι: $\frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$, άρα στην περίπτωση του προβλήματος

$$\overline{T} = \frac{1}{12} \int_0^{12} T(t)\,dt$$

15. $f''(x) > 0$, άρα $f'(x) \uparrow$, οπότε $f'(\beta) - f'(\alpha) > 0$ και $f'(x) > 0$, άρα $\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha) > 0$. (Στα ίδια συμπεράσματα θα μπορούσαμε να φτάσουμε αν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα: $f(x) > 0$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > 0$)

16. Αν A ο συνολικός πληθυσμός f η ζητούμενη συνάρτηση τότε

$$\frac{df}{dt} = K(A - f(t)) \text{ και } f(t) = A + ce^{-\kappa t}$$

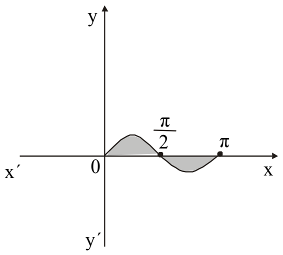
17. Η f δεν είναι συνεχής στο 0.

18. $\sqrt{\text{συν}^2 x} = |\text{συν}x|$ στο $[0, \pi]$

19. **Α.** $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$ **Β.** $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

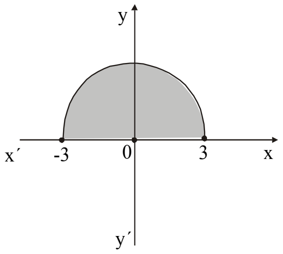
Γ. $\int_{-1}^1 (-x^2+1)\,dx$ **Δ.** $\int_{-1}^1 x^2\,dx$

20. **α)**



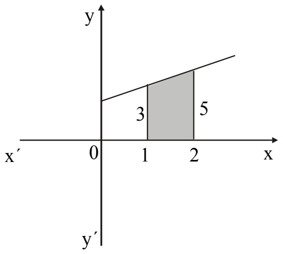
$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = -\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx$$

β)



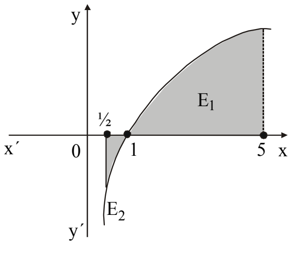
είναι εμβαδόν ημικυκλίου

γ)



εμβαδόν τραπεζίου

δ)



$E_1 > E_2$

21. α) $(A'B'\Delta') = 3\ln 3 - 2$

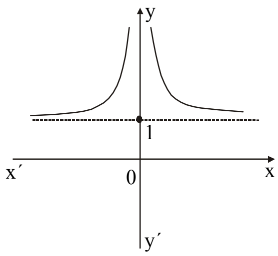
β) $(O\Delta\Gamma) = \dfrac{9}{2}$, $(AO\Gamma B) = \dfrac{9}{2} - (3\ln 3 - 2)$ λόγω συμμετρίας

22. α) $\dfrac{1}{\lambda - \kappa}\displaystyle\int_{\kappa}^{\lambda} x^2\,dx = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\lambda^3 - \kappa^3}{\lambda - \kappa} = \dfrac{1}{3}\,(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$

β) Υπάρχει $\xi \in (\kappa, \lambda)$ ώστε $\dfrac{1}{\lambda - \kappa}\displaystyle\int_{\kappa}^{\lambda} x^2\,dx = f(\xi) = \xi^2$

23. α) $E_1 = \ln\lambda$, $E_2 = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$ **β)** $I_1 = +\infty$ $I_2 = 1$

24. α)



β) Στο $[1, 2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $f(2) \le \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx \le f(1)$

γ) $\dfrac{9}{4}$ **δ)** $\displaystyle\int_2^{\alpha} f(x)\,dx = \dfrac{9}{8}$

25. α) $[\ln f(x)]' = \left(-\dfrac{1}{x}\right)' \ldots$ **β)** $2004\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}} - \dfrac{1}{e}\right)$

26. α) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **γ)** $E(\lambda) = 1 - \dfrac{1}{e^{\lambda}}$ **δ)** 1