Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α
Θ Ε Τ Ι Κ Η Σ - Τ Ε Χ Ν Ο Λ Ο Γ Ι Κ Η Σ
Κ Α Τ Ε Υ Θ Υ Ν Σ Η Σ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

(εκπαιδευτικό υλικό Θετικής κατεύθυνσης 1999-2000)

ΜΕΡΟΣ Α΄: ΑΛΓΕΒΡΑ

Κεφάλαιο 2ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. * Αν $z = α + βi$, $α, β \in R$ και $z = 0$, τότε $α = 0$ και $β = 0$. **Σ** **Λ**

2. * Αν $z = α + βi$ και $αβ \neq 0$, τότε $\frac{1}{z} = \frac{1}{α} + \frac{1}{β}i$. **Σ** **Λ**

3. * Αν $z = κ + λi$ $κ, λ \in R$, τότε $Re(z) = κ$. **Σ** **Λ**

4. * Αν $z = x + (y - 1)i$ και $Im(z) = 0$, τότε $y = 1$. **Σ** **Λ**

5. * Αν $z_1, z_2 \in C$ με $Re(z_1 + z_2) = 0$, τότε $Re(z_1) + Re(z_2) = 0$. **Σ** **Λ**

6. * Οι εικόνες των φανταστικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στον άξονα y΄y. **Σ** **Λ**

7. * Αν $i^2 = -1$ τότε $i^{2003} = i$. **Σ** **Λ**

8. * Οι εικόνες των αντίθετων μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x. **Σ** **Λ**

9. * Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζεται $z^{\circ} = 1$. **Σ** **Λ**

10. * Αν M_1, M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο και ο άξονας x΄x είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος M_1M_2, τότε είναι $z_1 = \overline{z}_2$. **Σ** **Λ**

11. * Αν $z_1 = α + βi$, $z_2 \in C$, και $z_1 + z_2 = 2α$, τότε $z_2 = \overline{z}_1$. **Σ** **Λ**

12. * Αν $Re(z) = 2$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω στην ευθεία $x = 2$. **Σ** **Λ**

13. * Αν $Im(z + i) = 8$ τότε οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στην ευθεία $y = 8$. **Σ** **Λ**

14. * Η εξίσωση $x^2 - 2x + λ = 0$, $λ \in R$, μπορεί να έχει ρίζες τους μιγαδικούς $1 + i$ και $1 - i$. **Σ** **Λ**

15. * Αν η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$, $α, β, γ \in R$ έχει ρίζα τον $2 + i$ θα έχει και τον $\frac{5}{2+i}$. **Σ** **Λ**

16. * Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$, $α, β, γ, \in R^*$ έχει πάντοτε λύση στο C. Σ Λ

17. * Αν Re $(z_1z_2) = 0$ τότε ισχύει πάντα Re $(z_1) \cdot$ Re $(z_2) = 0$. Σ Λ

18. * Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|-z| = |\overline{z}|$. Σ Λ

19. * Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Σ Λ

20. * Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, $z \in C$, παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία Α (z_1) και Β (z_2). Σ Λ

21. * Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με άγνωστο το $z \in C$ και $z_1, z_2 \in C$ έχει μόνο μια λύση. Σ Λ

22. * Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με κέντρο Κ (z_0) και ακτίνα ρ. Σ Λ

23. * Για το μιγαδικό αριθμό z = 2 (συν (3π) + iημ (3π)) ισχύει Arg (z) = 3π. Σ Λ

24. * Αν z = 3 (συν $\frac{\pi}{4}$ + iημ $\frac{\pi}{4}$) τότε ένα όρισμα του z είναι το $\frac{29\pi}{4}$. Σ Λ

25. * Αν ένας μιγαδικός αριθμός πολλαπλασιαστεί επί i τότε η διανυσματική του ακτίνα στρέφεται κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$. Σ Λ

26. * Η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού z = α + βi είναι z = ρ (συνθ + iημθ), όπου ρ = $|z|$ και θ ένα όρισμά του. Σ Λ

27. * Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = \rho_1$ (συνθ_1 + iημθ_1), $\rho_1 > 0$ και $z_2 = \rho_2$ (συνθ_2 + iημθ_2), $\rho_2 > 0$ ισχύει $z_1z_2 = \rho_1\rho_2$ (συν $(\theta_1\theta_2)$ + ημ $(\theta_1\theta_2)$). Σ Λ

28. * Αν τα ορίσματα δύο μιγαδικών διαφέρουν κατά κπ, κ ∈ Z, τότε οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή των αξόνων βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Σ Λ

29. * Το θεώρημα De Moivre ισχύει και για εκθέτη αρνητικό ακέραιο αριθμό. Σ Λ

30. * Ισχύει $(\sigma\upsilon\nu\, 12° + i\eta\mu 12°)^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$. Σ Λ

31. * Η εξίσωση $z^5 = 32$ έχει πέντε ρίζες, των οποίων οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο το Ο (αρχή των αξόνων) και ακτίνα 2. Σ Λ

32. * Η εξίσωση $z^3 + i = 0$ έχει μοναδική ρίζα τον $z_0 = i$. Σ Λ

33. * Οι εξισώσεις $x^\nu = 1$ και $x^\mu = 1$, $\nu, \mu \in N^*$ έχουν τουλάχιστον μια κοινή ρίζα. Σ Λ

34. * Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^\nu = \alpha$, $\alpha \neq 0$ και $\nu \in N^*$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου. Σ Λ

35. * Αν η εξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, $\alpha \neq 0$, έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε αυτή έχει οπωσδήποτε μια πραγματική ρίζα. Σ Λ

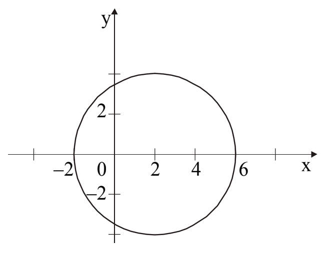
36. * Υπάρχει εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές 3ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς 2, 1 + i, 2 + i. Σ Λ

37. * Δύο ορίσματα ενός μιγαδικού αριθμού διαφέρουν κατά γωνία 2κπ με $\kappa \in Z$. Σ Λ

38. * Στο μιγαδικό επίπεδο η εικόνα του μιγαδικού αριθμού 2 + 3i είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου $|z| = 4$. Σ Λ

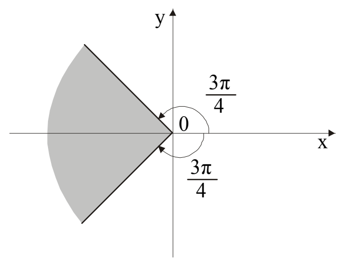
39. * Όλα τα σημεία της ευθείας y = x στο μιγαδικό επίπεδο είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z = \alpha + \alpha i$ με $\alpha \in R$. Σ Λ

40. * Στο μιγαδικό επίπεδο του διπλανού σχήματος η εξίσωση του κύκλου είναι $|z - 2| = 4$.



Σ Λ

41. * Οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν τη σχέση $\left|\text{Arg}(z) - \pi\right| < \dfrac{\pi}{4}$ έχουν εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο που απεικονίζονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του διπλανού σχήματος.



Σ **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η ισότητα x + (y - 1) i = 3 + 4i ισχύει αν και μόνο αν

Α. x = 3 ή y = 5 **Β.** x = 3 και y = 4
Γ. x = 3 ή y = 4 **Δ.** x = 3 και y = 5 **Ε.** x + y = 7

2. * Αν $i^2 = -1$ και $\left[(i^2)^3\right]^\kappa = 1$, τότε η μικρότερη τιμή του θετικού ακεραίου κ είναι

Α. 1 **Β.** 3 **Γ.** 6 **Δ.** 2 **Ε.** 5

3. * Η εικόνα κάθε φανταστικού αριθμού στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση

Α. y = x **Β.** y = - x **Γ.** y = 0
Δ. x = 0 **Ε.** σε καμία από τις προηγούμενες.

4. * Οι εικόνες των μιγαδικών 2 + 3i και 3 + 2i στο μιγαδικό επίπεδο έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία

Α. x = 2 **Β.** y = 3 **Γ.** y = x **Δ.** y = - x **Ε.** x = 0

5. * Αν η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο έχει φορέα τη διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου, τότε ο z μπορεί να είναι ο

Α. $2 + i$ **Β.** $-2 + 2i$ **Γ.** $2 + 2i$ **Δ.** $-2 - 2i$ **Ε.** $-2 - i$

6. * Αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο της ευθείας $2x + 3y - 1 = 0$, τότε ο z **δεν** μπορεί να είναι ο

Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** $1 - \frac{1}{3}i$ **Γ.** $5 - 3i$ **Δ.** $\frac{1}{3}i$ **Ε.** $1 + 2i$

7. * Αν η εικόνα του μιγαδικού $w = (x + 1) + (y - 1)i$, $x, y \in R$, στο μιγαδικό επίπεδο είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο $z = x + yi$ ισούται με

Α. $1 - i$ **Β.** $1 + i$ **Γ.** $-1 - i$ **Δ.** $-1 + i$ **Ε.** $2 + 2i$

8. * Αν $\nu \in N$, από τις παρακάτω ισότητες **δεν** είναι σωστή η

Α. $i^{4\nu} = 1$ **Β.** $i^{4\nu+1} = -i$ **Γ.** $i^{4\nu+2} = -1$ **Δ.** $i^{\nu+4} = i^{\nu}$ **Ε.** $i^{4\nu+3} = -i$

9. * Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha\beta \neq 0$ και $\bar{z}$ ο συζυγής του ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι σωστή;

Α. $z + \bar{z}$ πραγματικός αριθμός **Β.** $z - \bar{z}$ φανταστικός αριθμός

Γ. $z \cdot \bar{z}$ φανταστικός αριθμός **Δ.** $-\overline{\bar{z} \cdot z}$ πραγματικός αριθμός

Ε. $\overline{z + \bar{z}}$ πραγματικός αριθμός

10. * Στο μιγαδικό επίπεδο, οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά

Α. ως προς τον άξονα y΄y **Β.** ως προς τον άξονα x΄x

Γ. ως προς την ευθεία $y = x$ **Δ.** ως προς την ευθεία $y = -x$

Ε. ως προς την αρχή των αξόνων

11. * Η εξίσωση $z^2 - 6z + \lambda = 0$, $\lambda \in R$, μπορεί να έχει ρίζα τον αριθμό

Α. i **Β.** $1 - i$ **Γ.** $1 + i$ **Δ.** $2 - i$ **Ε.** $3 + i$

12. * Η εξίσωση $x^2 + \alpha x + 5 = 0$, $\alpha \in R$ μπορεί να έχει ρίζα τον

Α. $- 3 + i$ **Β.** $2 - i$ **Γ.** $1 - i$ **Δ.** $3 - i$ **Ε.** $- 3 - i$

13. * Αν η εξίσωση $z^2 - \kappa z + \lambda = 0$, $\kappa, \lambda \in Z$ έχει ρίζα τον $2 + i$ τότε ισχύει

Α. $\kappa = 6$ και $\lambda = 5$ **Β.** $\kappa = 4$ και $\lambda = 1$ **Γ.** $\kappa = 3$ και $\lambda = 4$

Δ. $\kappa = 4$ και $\lambda = 5$ **Ε.** $\kappa = 5$ και $\lambda = 4$

14. * Αν $z = x + yi$ ποια από τις παρακάτω ισότητες **δεν** είναι πάντα σωστή;

Α. $|z| = |\overline{z}|$ **Β.** $|z| = |-z|$ **Γ.** $|z|^2 = z^2$

Δ. $|z| = \sqrt{x^2 + (-y^2)}$ **Ε.** $|z^2| = |\overline{z}|^2$

15. * Αν $|z_1| = 3$ και $z_2 = 4 + 3i$ τότε η μεγαλύτερη τιμή του $|z_1 + z_2|$ είναι

Α. 5 **Β.** 8 **Γ.** 9 **Δ.** 12 **Ε.** 14

16. * Αν $|\overline{z}_1| = 2$ και $|-z_2| = 5$ τότε η ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ είναι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 10

17. * Αν $z = 3 + yi$ και $|z| = 5$, τότε μια τιμή του y είναι η

Α. 5 **Β.** $\sqrt{5}$ **Γ.** $- 4$ **Δ.** $\sqrt{3}$ **Ε.** 3

18. * Αν οι εικόνες δύο μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο είναι στο ίδιο τεταρτημόριο, ποια από τις παρακάτω σχέσεις μπορεί να ισχύει;

Α. $z_1 = - z_2$ **Β.** $z_1 = \overline{z}_2$ **Γ.** $z_1 = - \overline{z}_2$

Δ. $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) = 0$ **Ε.** κανένα από τα παραπάνω

19. * Αν το σημείο Ρ (x, y) είναι εικόνα του μιγαδικού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z - 3| = 5$, το Ρ βρίσκεται πάνω σε

Α. ευθεία **Β.** έλλειψη **Γ.** κύκλο

Δ. παραβολή **Ε.** υπερβολή

20. * Η εξίσωση $|z - (1 + 2i)| = 4$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με

Α. κέντρο (- 1, 2) και ακτίνα 4 **Β.** κέντρο (1, - 2) και ακτίνα 2

Γ. κέντρο (1, - 2) και ακτίνα 4 **Δ.** κέντρο (1, 2) και ακτίνα 2

Ε. κέντρο (1, 2) και ακτίνα 4

21. * Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο τον κύκλο με κέντρο το Ο (αρχή των αξόνων) και ακτίνα 10. Από τους παρακάτω αριθμούς έχει εικόνα πάνω στον κύκλο ο μιγαδικός αριθμός

Α. $z = \sqrt{2} + 3i$ **Β.** $z = \sqrt{3} + i\sqrt{7}$ **Γ.** $z = 2 - i\sqrt{8}$

Δ. $z = 8 + 6i$ **Ε.** $z = \sqrt{2} + i\sqrt{8}$

22. * Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει $|z - 2| = |z - i|$ είναι

Α. ο άξονας y΄y **Β.** η ευθεία y = x **Γ.** ο άξονας x΄x

Δ. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0) και (0, 1)

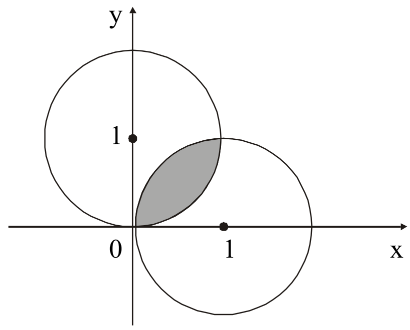
Ε. η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία (0, 2) και (1, 0)

23. * Στο μιγαδικό επίπεδο ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ (2, 1) και ακτίνα 3 είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει

Α. $|z - (2 - i)| = 3$ **Β.** $|z - (1 + 2i)| = 3$

Γ. $|z - (2 + i)| = 9$ **Δ.** $|z - (2 + i)| = 3$ **Ε.** $|z + (2 + i)| = 3$

24. * Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει



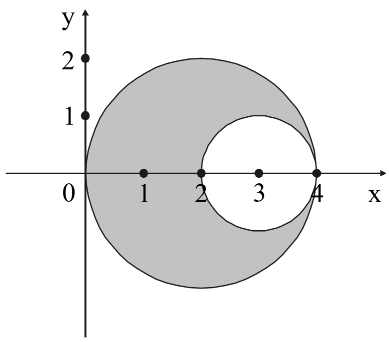
Α. $|z + 1| < 1$ και $|z + i| < 1$

Β. $|z - 1| < 1$ και $|z + i| < 1$

Γ. $|z - 1| > 1$ και $|z - i| > 1$

Δ. $|z - 1| < 1$ και $|z - i| < 1$ **Ε.** $|z + 1| < 1$ και $|z - i| < 1$

25. * Οι μιγαδικοί αριθμοί z που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει



Α. $|z - 2| < 2$ και $|z - 3| < 1$

Β. $|z - 2| < 2$ και $|z - 3| > 1$

Γ. $|z + 2| < 2$ και $|z - 3| > 1$

Δ. $|z + 2| < 2$ και $|z + 3| > 1$ **Ε.** $|z - 2| > 2$ και $|z - 3| < 1$

26. * Αν η εξίσωση $|z - 2| = |z - κi|$ επαληθεύεται από τους μιγαδικούς αριθμούς που η εικόνα τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία y = x, ο πραγματικός αριθμός κ ισούται με

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 2 **Δ.** - 2 **Ε.** 4

27. * Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε το πλήθος των λύσεων του συστήματος $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$ με άγνωστο τον z είναι

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 4 **Ε.** 0

28. * Για το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού z από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** είναι σωστή η

Α. Το Arg (z) βρίσκεται στο διάστημα [0, 2π)

Β. Το Arg (z) είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του z στο μιγαδικό επίπεδο με τον άξονα x΄x και παίρνει τιμές στο [0, 2π)

Γ. Αν Arg (z) = $\frac{\pi}{4}$ ο z έχει πραγματικό μέρος ίσο με το φανταστικό

Δ. Αν Arg (z) = $\frac{\pi}{2}$ ο z είναι πραγματικός αριθμός

Ε. Αν Arg (z) = $\frac{3\pi}{4}$ τότε Re (z) = - Im (z)

29. * Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha\beta \neq 0$ και Arg (z) = θ, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ τότε πάντοτε ισχύει

Α. $\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon\varphi\theta$ **Β.** $\alpha\beta = \sigma\varphi\theta$ **Γ.** $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\theta$

Δ. $\alpha\beta = \varepsilon\varphi\theta$ **Ε.** $\alpha + \beta = \sigma\varphi\theta$

30. * Αν Arg (z) = $\frac{\pi}{4}$, η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο της ευθείας με εξίσωση

Α. y = x **Β.** y = - x **Γ.** y = 2x **Δ.** y = - 2x **Ε.** $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$

31. * Αν η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία y = - x, τότε από τις παρακάτω γωνίες Arg (z) μπορεί να είναι η

Α. $\frac{\pi}{4}$ **Β.** $\frac{9\pi}{4}$ **Γ.** $\frac{3\pi}{4}$ **Δ.** π **Ε.** $\frac{5\pi}{4}$

32. * Αν $z_1 = z_2$ όπου $z_1 = \rho$ (συνθ + iημθ), $z_2 = \rho$ (συν $\frac{\pi}{3}$ + iημ $\frac{\pi}{3}$), ρ > 0, τότε η γωνία θ **δεν** μπορεί να είναι

Α. 420° **Β.** 780° **Γ.** 1140° **Δ.** 1320° **Ε.** 1500°

33. * Το γινόμενο των μιγαδικών αριθμών z_1 = 2 (συν30° + iημ30°) και z_2 = 7 (συν10° + iημ10°) είναι

Α. 14 (συν300° + iημ300°) **Β.** 9 (συν40° + iημ40°)

Γ. 14 (συν40° + iημ40°) **Δ.** 9 (συν300° + iημ300°)

Ε. 2^7 (συν3° + iημ3°)

34. * Ο μιγαδικός αριθμός (συν12° + iημ12°)^5 ισούται με

Α. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **Β.** $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Δ. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **Ε.** με κανένα από τους προηγούμενους

35. * Αν $z = \frac{20\,(\text{συν}15° + i\text{ημ}15°)}{5\ (\text{συν}3° + i\text{ημ}3°)}$ τότε ο z ισούται

Α. 4 **Β.** 15 (συν5° + iημ5°)

Γ. 4 (συν12° + iημ12°) **Δ.** 4 (συν5° + iημ5°)

Ε. 15 (συν12° + iημ12°)

36. * Αν z = ρ (συν20° + iημ20°), ρ > 0, τότε το Arg ($\overline{z}$) ισούται με

Α. $(\frac{1}{20})°$ **Β.** 70° **Γ.** $(\frac{1}{70})°$ **Δ.** 160° **Ε.** 340°

37. * Αν Α, Β είναι οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών z και iz αντιστοίχως τότε η γωνία ΑΟΒ (Ο η αρχή των αξόνων) ισούται με

Α. $\frac{3\pi}{2}$ **Β.** $\frac{2\pi}{3}$ **Γ.** π **Δ.** $\frac{5\pi}{6}$ **Ε.** $\frac{\pi}{2}$

38. * Αν z = συνθ + iημθ τότε ο $\frac{1}{z}$ ισούται με

Α. $\frac{1}{\text{συνθ}} + i\,\frac{1}{\text{ημθ}}$ **Β.** $\text{συν}\,\frac{1}{\theta} + i\text{ημ}\,\frac{1}{\theta}$ **Γ.** - συνθ - iημθ

Δ. συν (- θ) + iημ (- θ) **Ε.** - συνθ + iημθ

39. * Αν $z = \text{συν}\,\frac{\pi}{4} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{4}$, ο z^{2000} ισούται με

Α. $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Β.** 1 **Γ.** - 1 **Δ.** 0 **Ε.** - i

40. * Αν Ρ (x) πολυώνυμο τουλάχιστον 2ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές και η εξίσωση Ρ (x) = 0 έχει ρίζα τον αριθμό 2 - i, θα έχει οπωσδήποτε και τον

Α. $2 + i^{20}$ **Β.** $\frac{1}{2+i^{20}}$ **Γ.** $2 + i^{33}$ **Δ.** $\frac{1}{2 - i}$ **Ε.** $2 - i^4$

41. * Αν η εξίσωση $x^3 + κx + λ = 0$, κ, λ ∈ R, έχει ως λύση την x = 2 + 5i, τότε αποκλείεται να έχει λύση την

Α. x = 5 **Β.** x = 2 - 5i **Γ.** x = 0 **Δ.** x = 1 + i **Ε.** x = - 3

42. * Οι αριθμοί 2 + i, 3 - 5i, - 1 + 3i, 2 + 7i είναι ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu \in N^*$, με πραγματικούς συντελεστές. Για το ν ισχύει

Α. $\nu = 4$ **Β.** $\nu = 6$ **Γ.** $4 < \nu < 8$

Δ. $\nu \geq 8$ **Ε.** $6 \leq \nu < 8$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Ο z είναι μιγαδικός αριθμός. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

z	Re (z)	Im (z)	- z	$\bar{z}$	$\frac{1}{z}$	$\lvert z \rvert$
- 2 + 3i						
- 2i						
- 5						
$\frac{1}{3i}$						

2. * Οι αριθμοί z_1, z_2 είναι μιγαδικοί. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

μιγαδικός αριθμός z	$z_1 = \sqrt{3} + i$	$z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$	$z_1 \cdot z_2 = \ldots$	$\frac{z_2}{z_1} = \ldots$	$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = \ldots$
$\lvert z \rvert$					
Agr (z)					
τριγωνο-μετρική μορφή z					

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Αν $z = α + βi$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί στην ίση της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\overline{\overline{z}}$	**1.** $2α$
Β. $z + \overline{z}$	**2.** $α^2 + β^2$
Γ. $z - \overline{z}$	**3.** $α + βi$
Δ. $z\overline{z}$	**4.** $α - βi$
	5. $2βi$
	6. $2α + i$

Α	Β	Γ	Δ

2. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε σχέση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z	***γεωμετρική περιγραφή των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. το πραγματικό μέρος του z είναι 2 **Β.** το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με το φανταστικό μέρος του **Γ.** το πραγματικό μέρος του z είναι αντίθετο του φανταστικού μέρους του	**1.** ο άξονας x΄x **2.** η ευθεία $y = x$ **3.** η ευθεία $y = -x$ **4.** η ευθεία $x = 2$ **5.** η ευθεία $y = -2$

Α	**Β**	**Γ**

3. * Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο Μ $(\frac{1}{2}, 1)$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε μιγαδικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην εικόνα του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
μιγαδικός αριθμός	***σημείο στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. $\frac{1}{\overline{z}}$	**1.** $(-\frac{1}{2}, 1)$
Β. $-\overline{z}$	**2.** $(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$
Γ. iz	**3.** $(\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$
	4. $(-1, \frac{1}{2})$
	5. $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$

Α	Β	Γ

4. ***** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε δύναμη του i που υπάρχει στη στήλη Α να αντιστοιχεί στην τιμή της που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
δύναμη του i	
Α. i^{13} **Β.** i^{14} **Γ.** i^{15} **Δ.** i^{0}	**1.** - i **2.** i **3.** - 1 **4.** 0 **5.** 1 **6.** 2i

Α	**Β**	**Γ**	**Δ**

5. ***** Αν $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε στοιχείο της στήλης Α να αντιστοιχεί στο ίσο του που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
Α. $\left\|\frac{1}{z}\right\|$	**1.** 0
	2. 1
Β. $1 - \left\|z^{20}\right\|$	**3.** 2
	4. $\frac{1}{2}$
Γ. $\left\|\frac{(\overline{z})^{31}}{2\left\|-z^2\right\|}\right\|$	**5.** 4

Α	Β	Γ

6. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο της στήλης Α να αντιστοιχεί στη σχέση που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
γεωμετρική περιγραφή των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο	***σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z***
Α. κύκλος κέντρου Κ (2, 1) και ακτίνας 3 **Β.** μεσοκάθετος του τμήματος με άκρα τα σημεία (2, 0), (0, - 1) **Γ.** κύκλος κέντρου Ο (0, 0) και ακτίνας 3	**1.** $\lvert z+2+i\rvert = 3$ **2.** $\lvert z\rvert = 3$ **3.** $\lvert z-2-i\rvert = 3$ **4.** $\lvert z+2\rvert = \lvert z-i\rvert$ **5.** $\lvert z-2\rvert = \lvert z+i\rvert$

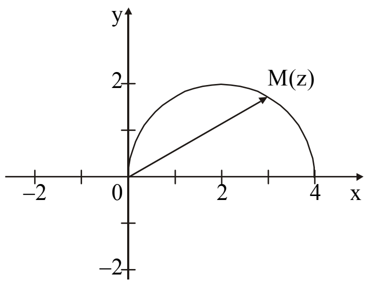
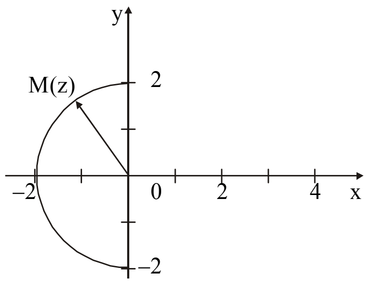
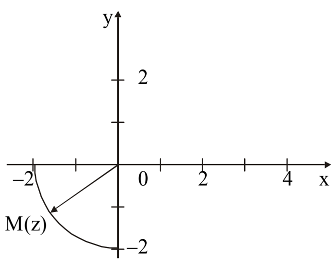
Α	**Β**	**Γ**

7. * Αν $z = x + yi$, $x, y \neq 0$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός, διάφορος του μηδενός, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε παράσταση της στήλης Α να αντιστοιχεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
σχέση που ικανοποιεί ο μιγαδικός αριθμός z	***γεωμετρικός τόπος του z στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. $Re(z) = c$	**1.** $y = x + c$
Β. $Im(z) = c$	**2.** $y = \frac{c}{x}$
Γ. $Re(z) \cdot Im(z) = c$	**3.** $y = c$
	4. $c \cdot x + y = 0$
	5. $x = c$

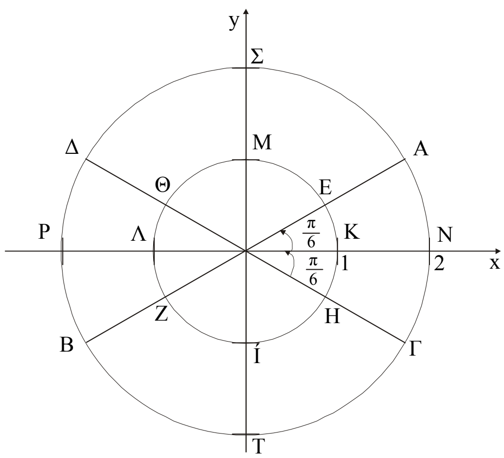
Α	Β	Γ

8. * Στα σχήματα της στήλης Α φαίνονται τόξα κύκλων στα οποία βρίσκεται η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε σε κάθε σχήμα της στήλης Α να αντιστοιχεί η σωστή σχέση της στήλης Β.

	Στήλη Α	**Στήλη Β**
Α.		**1.** $\lvert z \rvert = 2$, $\text{Im}(z) \le 0$ και $\text{Re}(z) \le 0$ **2.** $\lvert z - 2 \rvert = 2$ και $\text{Im}(z) \ge 0$ **3.** $\lvert z \rvert = 2$ και $\text{Re}(z) \le 0$ **4.** $\lvert z + 2 \rvert = 2$ και $\text{Re}(z) < 0$
Β.		
Γ.		

Α	Β	Γ

9. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε κάθε μιγαδικός αριθμός της στήλης Α να αντιστοιχεί στην εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $z_1 = 2\left(\text{συν}\,\frac{\pi}{6} + i\text{ημ}\,\frac{\pi}{6}\right)$ **2.** $z_2 = \text{συν}\,\frac{5\pi}{6} + i\text{ημ}\,\frac{5\pi}{6}$ **3.** $z_3 = \text{συν}\,\frac{19\pi}{6} + i\text{ημ}\,\frac{19\pi}{6}$ **4.** $z_4 = 2\left(\text{συν}\,\frac{\pi}{6} - i\text{ημ}\,\frac{\pi}{6}\right)$	

1	2	3	4

10. * Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα ώστε η εικόνα κάθε μιγαδικού αριθμού, το όρισμα του οποίου φαίνεται στη στήλη Α να βρίσκεται στην ευθεία που ανήκει και γράφεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού z	***γεωμετρική περιγραφή των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο***
Α. Arg (z) = $\frac{\pi}{2}$ **Β.** Arg (z) = $\frac{\pi}{4}$ **Γ.** Arg (z) = $\frac{3\pi}{4}$	**1.** ο άξονας x΄x **2.** ο άξονας y΄y **3.** η ευθεία y = x **4.** η ευθεία y = - x **5.** η ευθεία y = c (c σταθερός)

Α	**Β**	**Γ**

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

   α) $x - 2 + 2yi = - 2i + 2 - yi$ β) $y + 2i = 3 - (2 + i)\, x$

   γ) $4y - 3yi - 2x = 2 - 5xi + 9i$ δ) $(x^2 + 1)\, i + 2x = x^2 - 2xi - 3$

2. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x^2 - x - 9i$ και $w = 2 - y^2 i$, $x, y \in R$.

   α) Να βρείτε τους x, y ώστε $z = w$.

   β) Να βρείτε τον z.

3. ** Δίνεται ο μιγαδικός $z = 6i - (3 - 4i)\, x - 3yi - (3i - 2)\, x + (4 - 2yi)$, $x, y \in R$.

   α) Να γράψετε τον z στη μορφή α + βi.

   β) Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $Re\,(z) = 0$ ii) $Im\,(z) = 0$

   iii) $Re\,(z) = Im\,(z)$ iv) $z = 0$

4. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = (2 + i)\, x + (y - 1)\, i - 5$, $x, y \in R$.

   α) Να τον γράψετε στη μορφή α + βi.

   β) Να γράψετε τον z συναρτήσει του x, αν $Im\,(z) = 0$.

   γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν $Re\,(z) = Im\,(z)$.

5. ** Δίνονται οι μιγαδικοί

   $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\, i$, $z_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\, i$,

   $z_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{27}\, i$, $z_5 = \frac{1}{16} + \frac{1}{54}\, i$, + …

   Να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων $w = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + \ldots$

6. ** Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

   α) $z_1 = \frac{5 - 2i}{1 - 2i}$ β) $z_2 = \frac{i - 1}{i} - \frac{2}{(1 - i)^2}$

7. ** Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $3i\,(-5i)$ β) $(2+i)\,(-i+3)$ γ) $\dfrac{3}{4i}$

δ) $\dfrac{1}{1-i}$ ε) $\dfrac{1-i}{-i+1}$ ζ) $\dfrac{(2+3i)\,(-i+1)}{1-2i}$

8. ** Να γράψετε στη μορφή α + βi τους μιγαδικούς αριθμούς:

α) $(2-3i)\,(4-5i)+7i-1$ β) $\dfrac{1-2i}{i+3}\cdot\dfrac{2i+1}{3i+1}$ γ) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

δ) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i}$ ε) $(1-i)^{-3}$

9. ** Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε οι μιγαδικοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{12+8i}{2-3i} + \dfrac{52+13i}{13i}$ να είναι ίσοι.

10. ** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύει: $(\alpha+\beta i)^2 = \dfrac{12+5i}{i}$.

11. ** Να υπολογιστεί το $x \in R$ ώστε να ισχύει: $1 + 2\sqrt{2}\,i = 3\,\dfrac{1+xi}{1-xi}$.

12. ** Να βρεθούν τα $x, y \in R$ ώστε οι μιγαδικοί:
$z_1 = x + 2y - i$ και $z_2 = 11 - (4x - y)\,i$ να είναι συζυγείς.

13. ** Αν z φανταστικός αριθμός με $z \neq -i$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\omega = \dfrac{z^3 - i}{z + i}$ είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός.

14. ** α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που επαληθεύουν την ισότητα $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$.

β) Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί την ισότητα $\bar{z} = z^2$.

15. ** Για τις διάφορες τιμές του $\nu \in N$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$f(\nu) = \dfrac{1 - i^{\nu+1}}{1 - i}$.

16. ** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N$ ισχύει $(1 + i)^{20\nu} = (1 - i)^{20\nu}$.

17. ** α) Να δείξετε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ίσος με το συζυγή του και αντιστρόφως.

β) Να δείξετε ότι αν $\omega = \dfrac{z}{z + i}$ και $\omega \in R$ τότε ο z είναι φανταστικός αριθμός.

18. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in R$.

α) Να γράψετε στη μορφή $\alpha + \beta i$ τον μιγαδικό $w = \dfrac{z + 8i}{z + 6}$.

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν $\mathrm{Im}(w) = 0$.

γ) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y, αν $\mathrm{Re}(w) = 0$.

δ) Να δείξετε ότι η προηγούμενη σχέση (γ) είναι εξίσωση κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του.

ε) Να δείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

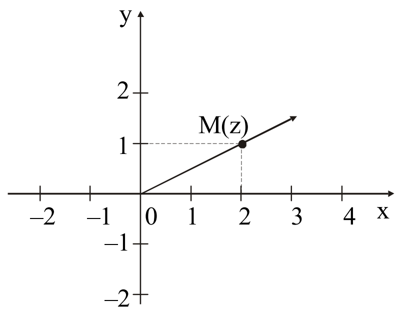
19. ** Η εξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in R$ έχει ρίζα τον μιγαδικό αριθμό $2 - i$.

α) Να βρείτε την άλλη ρίζα. β) Να βρείτε τα α και β.

20. ** Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, $x, y \in R$, για τους οποίους ισχύει: $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.

21. ** Αν η εικόνα του μιγαδικού $z = λ + (λ - 1)i$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στην ευθεία $y = 4x + 1$, να βρεθεί ο $λ \in R$.

22. ** Να συμπληρώσετε το διπλανό σχήμα με το σημείο M_1 $(2z)$. Μετά να βρείτε τα σημεία M_2 $(2\bar{z})$, M_3 $(-2z)$ êáé M_4 $(-2\bar{z})$.
Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $M_1M_2M_3M_4$.



23. ** Ο μιγαδικός $z = 2 + i$ να αναλυθεί σε άθροισμα δύο μιγαδικών z_1, z_2 που οι εικόνες τους βρίσκονται αντίστοιχα στις ευθείες $y = x - 2$ και $y = 2x - 1$.

24. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \dfrac{2+i}{1-3i}$ β) $z = \dfrac{(1-i)^2}{1+i} + 2 - 4i$

25. ** Να βρεθεί το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

α) $z = \left(\dfrac{2+i}{1-3i}\right)^2$ β) $z = \left(\dfrac{2+i\sqrt{5}}{3}\right)^ν$, $ν \in N$.

26. ** Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z που ικανοποιεί την ισότητα $|z| + z = 2 + i$.

27. ** Αν $z \in C$ και $|z+9| = 3\,|z+1|$, αποδείξτε ότι $|z| = 3$.

28. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός ω.

α) Να δειχθεί ότι αν ω φανταστικός αριθμός, τότε $\omega = -\overline{\omega}$ και αντιστρόφως.

β) Με βάση το προηγούμενο ή με άλλο τρόπο δείξτε ότι αν ο αριθμός $\omega = \frac{z-1}{z+1}$, $z \neq -1$, είναι φανταστικός, τότε $|z| = 1$.

29. ** Να γράψετε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς z αν ξέρουμε ότι η απόλυτη τιμή του πραγματικού μέρους του z είναι 3 και η απόλυτη τιμή του φανταστικού μέρους του z είναι 4. Πού βρίσκονται οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των παραπάνω μιγαδικών αριθμών;

30. ** Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1|$.

31. ** Να λυθεί στο C η εξίσωση: $z + |z+1| + i = 0$.

32. ** Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $|1-z| > |z|$, δείξτε ότι $\text{Re}(z) < \frac{1}{2}$.

33. ** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν τη σχέση $2|z-1| = |z-4|$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ο (0, 0) και ακτίνας 2.

34. ** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο αν ο αριθμός $\frac{z+2i}{z+1}$ είναι πραγματικός.

35. ** Ο μιγαδικός αριθμός z ικανοποιεί τις σχέσεις:

$-2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \qquad (1)$

$|\operatorname{Im}(z)| \leq 2 \qquad (2)$

$|z| \geq 2 \qquad (3)$

Να γραμμοσκιάσετε στο μιγαδικό επίπεδο το χωρίο που αντιπροσωπεύει το σύνολο των εικόνων του z και να βρείτε το εμβαδόν του.

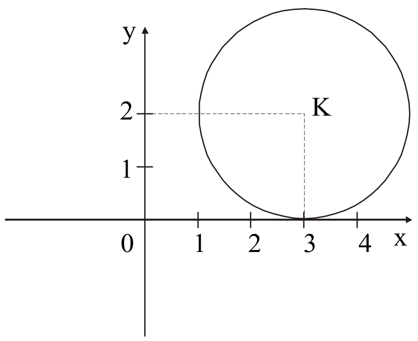
36. ** Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:

α) $|z+1-i| = 3$

β) $|z-1-i| < 4$

γ) $1 < |z-1+i| < 2$

37. ** Ο κύκλος του διπλανού σχήματος εφάπτεται του άξονα των τετμημένων και είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, $x, y \in R$ στο μιγαδικό επίπεδο.



α) Από τις παρακάτω εξισώσεις, να επιλέξετε δύο που τον αντιπροσωπεύουν:

i) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$

ii) $3x^2 + 2y^2 = 4$

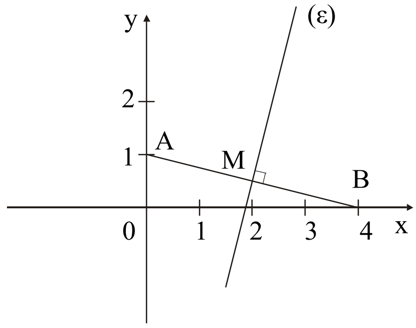
iii) $|z| - |3+2i| = 4$

iv) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

v) $|z-3-2i| = 2$

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

38. ** Στο διπλανό σχήμα η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, $x, y \in R$ στο μιγαδικό επίπεδο.



α) Από τις παρακάτω εξισώσεις, να επιλέξετε τρεις που τον αντιπροσωπεύουν:

i) $x^2 - i = y^2 + 4$

ii) $|z - i| = |z - 4|$

iii) $|z - 1| - |z - 4| = 0$

iv) $y = 4x - \frac{15}{2}$

v) $Re(z) = 2Im(z)$

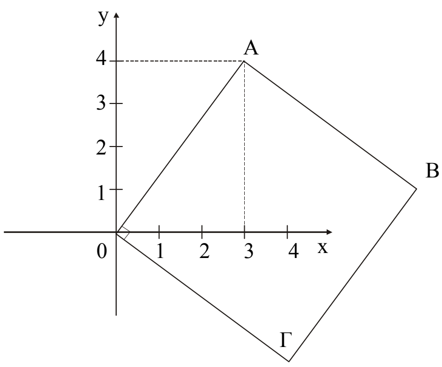
vi) $8Re(z) = 15 + 2Im(z)$

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

39. ** Στο διπλανό σχήμα το ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο. Αν Α, Β και Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = x + yi$ και $z_3 = κ + λi$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο:

α) Να δειχθεί ότι $3κ + 4λ = 0$.

β) Να βρεθούν οι z_2 και z_3.



40. ** Να γραφούν στην τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί:

α) $\frac{i - 1}{i} \cdot \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ β) $\frac{3}{2i}$ γ) $\frac{1}{συν\frac{4π}{3} - iημ\frac{4π}{3}}$

41. ** Να γραφούν στην τριγωνομετρική μορφή οι μιγαδικοί αριθμοί:

α) $z = -$ συνθ + iημθ β) $z = -$ συνθ - iημθ γ) $z =$ ημθ + iσυνθ

42. ** Αν $z_1 = \dfrac{1+5i}{3+2i}$ και $z_2 = -\sqrt{2}$ (συν $\dfrac{\pi}{3}$ + iημ $\dfrac{\pi}{3}$), να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι αριθμοί: α) z_1z_2 β) $\dfrac{z_1}{z_2}$

43. ** Να δείξετε ότι για κάθε ακέραιο ν ισχύει: $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3\nu} = 1$.

44. ** Να δείξετε ότι: $(1 + i)^{\nu} + (1 - i)^{\nu} = 2^{\frac{\nu+2}{2}}$ συν $\dfrac{\nu\pi}{4}$, $\nu \in N$.

45. ** Να βρείτε το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού αριθμού:

$z = \dfrac{(\text{ημθ - iσυνθ})^4}{(\text{συνθ - iημθ})^3}$.

46. ** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \sqrt{3} + i$.

α) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.

β) Αν ν θετικός ακέραιος να βρείτε τον $w = z^{\nu}$.

γ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ν ώστε ο w να είναι πραγματικός.

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του ν ώστε ο w να είναι φανταστικός.

47. ** Στο μιγαδικό επίπεδο έστω $\overrightarrow{OA}$ η διανυσματική ακτίνα ενός μιγαδικού z_1 και $\overrightarrow{OB}$ η διανυσματική ακτίνα του $z_2 = z_1 \cdot w$, όπου $w = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

α) Να γράψετε τον w στην τριγωνομετρική του μορφή.

β) Να δείξετε ότι $w^3 = -1$.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

δ) Να δείξετε ότι $z_2^3 = -z_1^3$ και $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$.

48. ** Δίνεται ο μιγαδικός $z = 1 - συνα + iημα$, $α \in [0, 2π)$.

α) Να δείξετε ότι $|z| = 2ημ\frac{α}{2}$ και $Arg(z) = \frac{π - α}{2}$.

β) Να γραφεί σε τριγωνομετρική μορφή ο αριθμός $ω = 1 + συνθ + iημθ$.

γ) Να βρεθεί ο $ω = (1 + συν\frac{10π}{9} + iημ\frac{10π}{9})^{18}$.

49. ** Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση: $Arg\left(\frac{z - i}{z + i}\right) = \frac{π}{4}$.

50. ** Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$Arg(z - 1) = \frac{π}{4}$ και $|z| = 13$.

51. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad$ $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad$ $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad$ $z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

α) Να βρείτε τα μέτρα τους.

β) Να βρείτε το πρωτεύον όρισμά τους.

γ) Να τους γράψετε σε μια σειρά ώστε να προηγείται αυτός που έχει το μικρότερο όρισμα.

δ) Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;

52. ** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$z_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$ $\qquad$ $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $\qquad$ $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}} i$

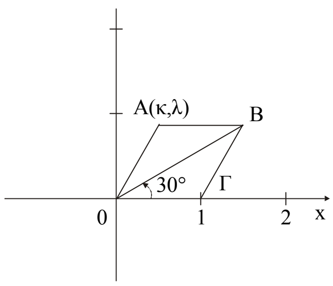
$z_4 = 5 - 5\sqrt{3}\, i$ $\qquad$ $z_5 = 3 - 3\sqrt{3}\, i$

α) Να γράψετε τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς στη μορφή $\kappa (1 - \sqrt{3}\, i)$, $\kappa \in R$ και να τους τοποθετήσετε σε μια σειρά, ώστε να προηγείται αυτός που έχει το μικρότερο μέτρο.

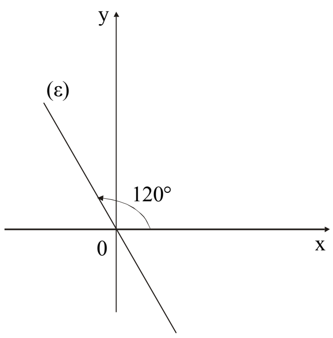
β) Πού βρίσκονται οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο;

γ) Να βρείτε τον μιγαδικό z έτσι ώστε η εικόνα του $z \cdot z_2$ να συμπίπτει με την εικόνα του z_3.

53. ** Στο διπλανό σχήμα το ΟΑΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. Αν $z = \kappa + \lambda i$ να δειχθεί ότι: $\lambda\sqrt{3} = \kappa + 1$.



54. ** Η ευθεία (ε) είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο.



α) Να επιλέξετε δύο από τις παρακάτω εξισώσεις που δίνουν σημεία της ευθείας (ε) που ανήκουν στο δεύτερο τεταρτημόριο

i) $\frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ ii) $x^2 = y$

iii) $\text{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ iv) $|z| = 1$ $\qquad$ v) $x + y\sqrt{3} = 0$

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

55. ** Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες των αριθμών:

α) $-8i$ β) $1 + i$

56. ** Να λυθεί στο σύνολο C η εξίσωση: $z^5 = 1 + i\sqrt{3}$.

57. ** Να λυθούν στο σύνολο C οι εξισώσεις:

α) $(z - 2)^3 = 1$ β) $(z - 1)^4 = 1$

58. ** Αν w είναι μια μη πραγματική κυβική ρίζα της μονάδας, να δείξετε ότι:

α) $1 + w + w^2 = 0$ β) $(1 + w)^3 = -1$

γ) $(1 + w^2)^2 = w^2$ δ) $(1 - w)(1 - w^2)(1 - w^4)(1 - w^5) = 9$

59. ** Αν w είναι μια μη πραγματική κυβική ρίζα της μονάδας να δείξετε:

α) $w^2 = \overline{w}$ β) $(1 + w\overline{w} + w^2 + \overline{w}^2)(\overline{w} + w^2)^3 = 8$

γ) $(1 + w)^{2\nu+1} + (\overline{w})^{2\nu+4} = 0$

60. ** α) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$.

γ) Να παραστήσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία που είναι εικόνες των ριζών.

δ) Τι είδους τρίγωνο σχηματίζουν οι εικόνες των ριζών; Να βρείτε το εμβαδόν του.

61. ** Να βρεθεί για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in R$ το πολυώνυμο $f(x) = 3x^4 - \alpha x^3 + 5x^2 - 9x + \beta$ έχει παράγοντα το $x^2 + 1$.

Στη συνέχεια να βρεθούν όλες οι ρίζες του $f(x)$.

62. ** Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί και το $x - i$ είναι παράγοντάς του, να αποδείξετε ότι το $x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $f(x)$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τα α, β, γ, δ γνωρίζοντας ακόμα ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = 10$.

63. ** Δίνεται η εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z - 7 = 0$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

64. ** Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2z\,\text{ημ}\,\frac{\beta}{2}\,\text{συν}\,\frac{\beta}{2} + \text{ημ}^2\,\frac{\beta}{2} = 0$, όπου β πραγματική παράμετρος με $\beta \in [0, 2\pi]$.

α) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι

$\text{ημ}\,\frac{\beta}{2}\,\text{συν}\,\frac{\beta}{2} \pm i\,\text{ημ}^2\,\frac{\beta}{2}$.

β) Να γράψετε τις ρίζες αυτές στην τριγωνομετρική τους μορφή.

65. ** Δίνεται η εξίσωση $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, $z \in C$, με ρίζες τους συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2. Να αποδείξετε ότι:

α) οι αριθμοί β και γ είναι πραγματικοί

β) η εξίσωση $z^2 + \beta z - \gamma = 0$ έχει ρίζες πραγματικές.

66. ** Αν $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z + 8 = 0$:

α) να λύσετε την εξίσωση $P(z) = 0$ και να γράψετε τις ρίζες της σε τριγωνομετρική μορφή.

β) να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τις εικόνες των τριών ριζών του $P(z)$.

67. ** Δίνεται η εξίσωση $|z - 1| = |z - 3i|$, $z \in C$.

α) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με άκρα Α (1, 0) και Β (0, 3).

β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση της (ε) είναι $x - 3y + 4 = 0$.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της (ε).

δ) Να βρεθεί η εικόνα του z για τον οποίο το $|z|$ είναι ελάχιστο.

68. ** Αν z μιγαδικός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in N^*$ τότε:

α) Να δειχθεί ότι $f(4\lambda) + f(4\lambda + 1) + f(4\lambda + 2) + f(4\lambda + 3) = 0$, $\lambda \in N^*$.

β) Αν $|z| = \rho$ και $Arg(z) = \theta$, να δειχθεί ότι:

$$f(4\lambda + 1) = \rho \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right].$$

γ) Αν $Arg(z) = \frac{\pi}{3}$ και $|z| = 2$, να σχεδιαστούν οι διανυσματικές ακτίνες των z και $f(4\lambda + 1)$ στο μιγαδικό επίπεδο και να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών 0, z και $f(4\lambda + 1)$.

69. ** Αν z μιγαδικός αριθμός με $Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$, τότε:

α) Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $|z - 2| = 2$.

β) Να δειχθεί ότι αν για τον z ισχύει $Im(z) = 1$, τότε $Re(z) = 2 + \sqrt{3}$ ή $Re(z) = 2 - \sqrt{3}$.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση 4ου βαθμού που θα έχει ρίζες τους αριθμούς ± 1 και τους μιγαδικούς του ερωτήματος (β).

70. ** Για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν αντιστοίχως $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 1$ και $Arg(w + 1) = \frac{\pi}{4}$. Να δειχθεί ότι:

α) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος C με κέντρο K (0, 1) και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.

β) το σύνολο των σημείων των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στην ευθεία με εξίσωση $y = x + 1$.

γ) η ευθεία (ε) του ερωτήματος (β) τέμνει τον κύκλο C του ερωτήματος (α) σε δύο σημεία αντιδιαμετρικά.

δ) αν t_1, t_2 είναι οι μιγαδικοί που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι οι τομές των (ε) και C, τότε ισχύει: $|t_1 + t_2|^{3\nu} + |t_1 - t_2|^{2\nu} = 2^{3\nu+1}$.