Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

   α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(2)$

   β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

   γ) Να βρείτε τις τιμές $f(t)$, $f(xt)$, $f(x + h)$, $x, t, h \in R$.

2. ** Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

   α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{(x - 1)\sqrt{x + 1}}$

   β) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x - 2} - 1} + \dfrac{3}{\sqrt{4 - x} - \sqrt{x}}$

   γ) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{|x - 2| - 1} + \dfrac{1}{|3x - 8| - |x|}$

   δ) $f(x) = \dfrac{5}{|x - 3| - 1}$

   ε) $f(x) = \log(x^2 + x - 2) + \log\dfrac{x + 3}{3 - x}$

   στ) $f(x) = \dfrac{\text{συν}x}{2\text{ημ}x - 1} + \dfrac{1}{\text{εφ}x - 1}$, $x \in [0, 2\pi]$

   ζ) $f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

α) Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις του παρακάτω πίνακα είναι ίσες με τη συνάρτηση f.

$f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	$f_2(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$	$f_3(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$
$f_4(x) = x\left(\frac{1}{x} + 1\right)$	$f_5(x) = \ln e^{x+1}$	$f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$

β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f_1(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$	$f_2(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$	$f_3(x) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$
$f_4(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2 - 1}}$	$f_5(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$f_6(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού καθεμιάς συνάρτησης.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ζεύγη ίσων συναρτήσεων.

γ) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

5. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$, $g(x) = \frac{2x^2 + 2\alpha x + \alpha}{2(x^2 - 1)}$, $\alpha \in R$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g

β) Για ποια τιμή του α ισχύει $f = g$;

6. ** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x+3, & x \ge 3 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

α) $f + g$ β) $f \cdot g$ γ) $\frac{f}{g}$

7. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 \cdot x_2}\right)$ για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της.

8. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

9. ** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 1]. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x^2)$ β) $f(x-4)$ γ) $f(\ln x)$

10. ** Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $f(|x|) = f(x)$.

11. ** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, να βρείτε το $f(2)$.

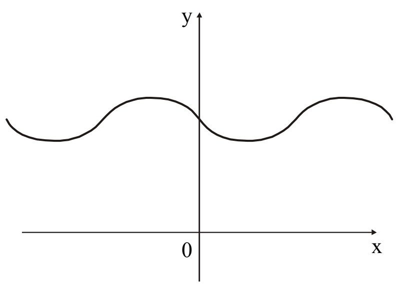
12. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 19x - 7$, $x \in (-5, 5)$.

α) Να βρείτε τη διαφορά $f(x) - f(4)$.

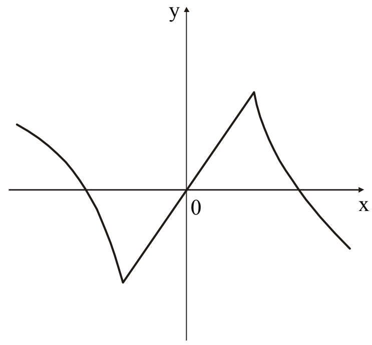
β) Να βρείτε τον αριθμό $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(4)| \leq M \cdot |x - 4|$ για κάθε $x \in (-5, 5)$.

13. ** Είναι γνωστό ότι μια συνάρτηση f είναι άρτια, όταν για κάθε $x \in D_f$, ισχύει $-x \in D_f$ και $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in D_f$, ενώ είναι περιττή όταν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in D_f$.

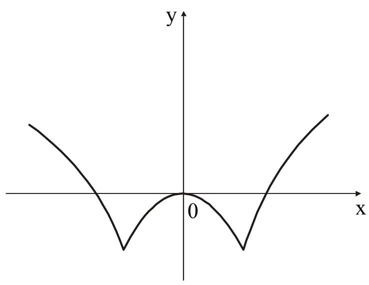
α) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνουν άρτια ή περιττή συνάρτηση ή δεν παριστάνουν άρτια ούτε περιττή.



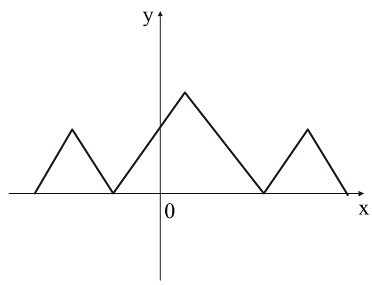
(I)



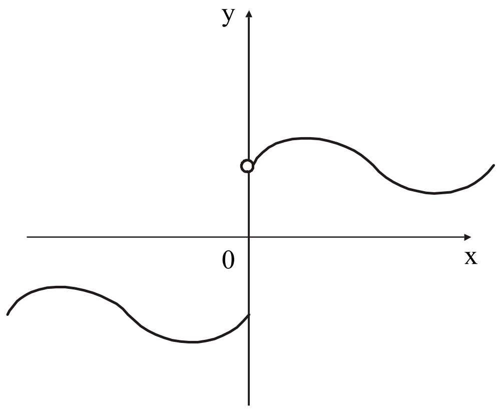
(II)



(III)



(IV)



(V)

β) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g (x) = f (x) + f (-x) είναι άρτια.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και παρουσιάζει μέγιστο για $x = x_0$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = - x_0$.

14. ** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R είναι περιττή. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β] με α, β > 0, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα [- β, - α].

15. ** α) Για κάθε α > 0, να δείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ με x > 0.

16. ** Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ, οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές για κάθε $x \in \Delta$ και οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο Δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

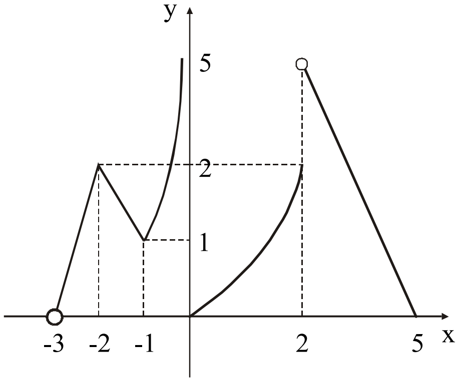
17. ** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από αυτό να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

β) το σύνολο τιμών της f

γ) το διάστημα και το είδος μονοτονίας της f

δ) τα ακρότατα της f



ε) τον τύπο της f, αν είναι γνωστό ότι:

στο διάστημα [- 1, 0) είναι υπερβολή της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$ και

στο διάστημα [0, 2) είναι παραβολή της μορφής $y = \alpha x^2$.

18. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1$, $x \in [-2, 3]$. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $f_1(x) = f(x) + 1$

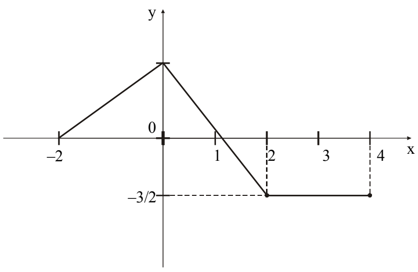
β) $f_2(x) = 2f(x)$

γ) $f_3(x) = -f(x)$

δ) $f_4(x) = |f(x)|$

19. ** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [2, 4]. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α) $g(x) = f(x) + 1$



β) $h(x) = -f(x)$ γ) $\varphi(x) = |f(x)|$.

20. ** α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = x^{2ν}$, ν θετικός ακέραιος.

β) Ομοίως των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^{2ν+1}$, ν θετικός ακέραιος.

21. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις 2f, f^2 και $\frac{f}{f}$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών στο ίδιο σύστημα αξόνων.

22. ** Είναι γνωστό ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, όταν για κάθε $x \in D_f$ ισχύουν:

- $x + T \in D_f$, $x - T \in D_f$
- $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = |ημx|$ με $x \in [-4π, 4π]$. Τι παρατηρείτε;

23. ** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$.

γ) Χρησιμοποιώντας τις f, g να δικαιολογήσετε ότι $(gof)(x) \neq g(x) \cdot f(x)$.

δ) Να εξετάσετε αν για τις παραπάνω συναρτήσεις f, g οι συναρτήσεις fog και gof είναι ίσες.

24. ** Ποια καμπύλη είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$g(x) = f(f(f(x)))$, αν $f(x) = \frac{1}{1-x}$;

25. ** Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$ ως σύνθεση δύο άλλων συναρτήσεων.

26. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x$, η οποία ονομάζεται και γραμμική συνάρτηση. Να δείξετε ότι η σύνθεση δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Να εξετάσετε αν το άθροισμα δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Το ίδιο και για το γινόμενο.

27. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο R, οι οποίες είναι γνησίως μονότονες και έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες).

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων fof και gog.

γ) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln[\ln(x)]$, $x > 1$.

28. ** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, για την οποία ισχύει $(fof)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f.

29. ** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

α) $f = f^{-1}$ β) $f = -f^{-1}$ γ) $f = f^{-1} + c$ ($c \neq 0$, σταθερά)

30. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

β) Να βρείτε την f^{-1}.

31. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και $h(x) = \dfrac{1}{x+2}$ με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$.

A. α) Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε $fog = h$.

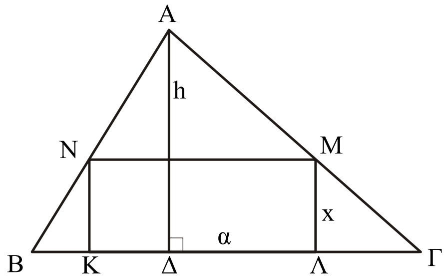
β) Να βρείτε μια συνάρτηση φ ώστε $\varphi of = h$.

B. α) Να βρείτε τις f^{-1}, g^{-1}, h^{-1} (αντίστροφες των f, g, h).

β) Να βρείτε τις $f^{-1}og^{-1}$ και $g^{-1}of^{-1}$.

γ) Να εξετάσετε αν $g^{-1}of^{-1} = h^{-1}$ (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

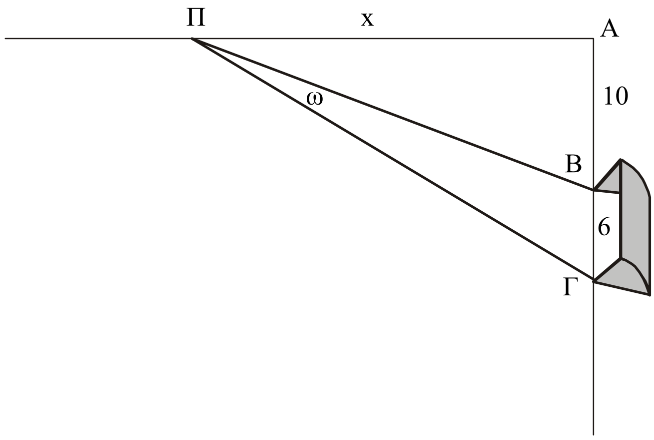
32. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ = α και ύψος ΑΔ = h. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο στο ΑΒΓ, όπως δείχνει το σχήμα.



α) Να εκφράσετε την περίμετρο L του ορθογωνίου ως συνάρτηση του ύψους του x.

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

33. ** Ένας παίκτης Π του ποδοσφαίρου επιτίθεται προς το αντίπαλο τέρμα ΒΓ κινούμενος πάνω στην ευθεία ΠΑ. Αν ΑΒ = 10 και ΒΓ = 6:



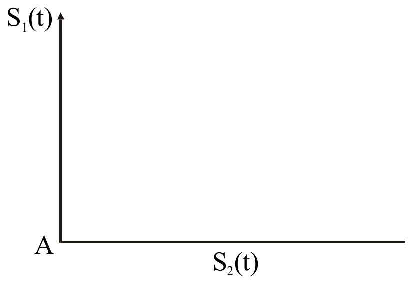
α) να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών ΑΠΒ και ΑΠΓ ως συνάρτηση της απόστασης ΠΑ = x

β) να υπολογίσετε την εφω ως συνάρτηση του x

γ) από ποια απόσταση x θα πρέπει να "σουτάρει" ο παίκτης ώστε να έχει το ευρύτερο δυνατό οπτικό πεδίο προς το τέρμα;

Δίνεται ότι $\text{εφ}\,(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{εφα} - \text{εφβ}}{1 + \text{εφα} \cdot \text{εφβ}}$.

34. ** Δύο κινητά διασταυρώνονται σε ένα σημείο Α και το πρώτο κατευθύνεται βόρεια του Α με σταθερή ταχύτητα υ_1 = 60 km/h, ενώ το δεύτερο κατευθύνεται ανατολικά του Α με σταθερή ταχύτητα υ_2 = 80 km/h.



α) Να εκφράσετε την απόσταση s των κινητών ως συνάρτηση του χρόνου t. Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται το ένα από το άλλο;

β) Αν Μ το μέσον της απόστασης s να εκφράσετε την απόσταση ΑΜ σαν συνάρτηση του t.

γ) Πόσο πρέπει να ελαττωθεί η ταχύτητα του δεύτερου κινητού, ώστε μετά από 4 ώρες το Μ να απέχει από το Α 180 km;

35. ** Μια μπάλα πετιέται κατακόρυφα από το έδαφος με ταχύτητα 20 m/s. Το ύψος h από το έδαφος στο οποίο φθάνει η μπάλα είναι συνάρτηση του χρόνου t και δίνεται από τον τύπο $h = f(t) = 20t - 5t^2$.

α) Να βρείτε το ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα τις χρονικές στιγμές:

$\frac{1}{2}$ s, 1 s, 2 s, 3 s, $\frac{7}{2}$ s, 4 s.

β) Ποιο είναι το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα;

γ) Ύστερα από πόσο χρόνο η μπάλα θα φθάσει σε ύψος $\frac{160}{9}$ m;

δ) Να βρείτε το λόγο $\upsilon(t) = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$, $t \neq 2$.

36. ** Το τμήμα παραγωγής μιας αυτοκινητοβιομηχανίας λειτουργεί μέχρι 10 ώρες ημερησίως και ο αριθμός των αυτοκινήτων που παράγει κάθε μέρα μετά από t ώρες λειτουργίας είναι $N(t) = 100t - 5t^2$ (t ακέραιος). Το ημερήσιο κόστος K (x) σε χιλιάδες “εύρο” για την παραγωγή x αυτοκινήτων είναι

$K(x) = 15 + 8x$.

α) Να βρείτε το ημερήσιο κόστος K ως συνάρτηση του χρόνου λειτουργίας του τμήματος παραγωγής.

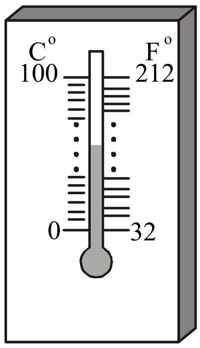
β) Μέχρι πόσες ώρες μπορεί να λειτουργεί το τμήμα παραγωγής ώστε το ημερήσιο κόστος παραγωγής να μην υπερβαίνει τα 3,885 εκατομμύρια “εύρο”;

37. ** Το εισιτήριο του τρένου που συνδέει δύο πόλεις κοστίζει 0 δρχ. για παιδιά μικρότερα των 3 ετών, 2.500 δρχ. για παιδιά από τριών ετών και άνω αλλά μικρότερα των 12 ετών και 6.000 δρχ. για κάθε άτομο από 12 ετών και άνω.

α) Να εκφράσετε την τιμή του εισιτηρίου ως συνάρτηση της ηλικίας.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

38. ** Στο θερμόμετρο του σχήματος μπορούμε να έχουμε τη θερμοκρασία ενός χώρου σε βαθμούς Κελσίου (C), αλλά και σε βαθμούς Φαρενάιτ (F). Θεωρούμε δεδομένο ότι η σχέση που συνδέει τις τιμές της θερμοκρασίας σε C με τις τιμές σε F είναι γραμμική (η γραφική της παράσταση είναι ευθεία).



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης η οποία μετατρέπει τους βαθμούς C σε βαθμούς F.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης η οποία μετατρέπει τους βαθμούς F σε βαθμούς C.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται με τον ίδιο αριθμό και στις δύο κλίμακες.

39. ** Σε πείραμα σχετικό με την εκπαίδευση των ζώων, χρησιμοποιήθηκε ένας ποντικός, τον οποίο ανάγκασαν να διασχίσει πολλές φορές κάποιο λαβύρινθο σ' ένα εργαστήριο. Ο χρόνος σε λεπτά, που ο ποντικός χρειάζεται για να διασχίσει το λαβύρινθο, δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 4 + \frac{14}{x}$, όπου x ο αριθμός των δοκιμών.

α) Πόσο χρόνο χρειάστηκε ο ποντικός κατά την 7η δοκιμή;

β) Από ποια δοκιμή και μετά θα χρειαστεί 5 λεπτά ή και λιγότερο;

γ) Θα μπορέσει ποτέ να κάνει λιγότερο από 4 λεπτά;

40. ** Από μετρήσεις διαπιστώθηκε ότι η καρδιά της γυναίκας μπορεί να φθάσει τους 216 το πολύ σφυγμούς ανά λεπτό σε ηλικία 5 ετών και τους 196 το πολύ σε ηλικία 25 ετών. Αν ο μέγιστος αριθμός των σφυγμών ως συνάρτηση της ηλικίας είναι της μορφής $y = αx + β$, τότε:

α) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης

β) να υπολογίσετε το μέγιστο αριθμό των σφυγμών ανά λεπτό στα 37 χρόνια μιας γυναίκας.

41. ** Σε x έτη από τώρα, ο πληθυσμός μιας κοινότητας θα είναι

$f(x) = 20 - \frac{6}{x+1}$ χιλιάδες. Να βρείτε:

α) πόσος θα είναι ο πληθυσμός σε 7 χρόνια από τώρα

β) πόσο θα αυξηθεί ο πληθυσμός κατά τη διάρκεια του 7ου χρόνου

γ) τι θα συμβεί, αν το x αυξάνεται "απεριόριστα";

42. ** Για μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας ο τύπος που δίνει το μήκος ℓ μιας μεταλλικής ράβδου, ως συνάρτηση της θερμοκρασίας t F°, είναι:

$$\ell - \ell_0 = \alpha t_0 (t - t_0)$$

όπου: ℓ_0 είναι το αρχικό μήκος της ράβδου σε θερμοκρασία t_0 F° και

α σταθερά που εξαρτάται από τον τύπο του μετάλλου.

α) Αν το αρχικό μήκος της ράβδου είναι 100 cm σε θερμοκρασία 60 F° και $\alpha = 10^{-5}$, να γράψετε την εξίσωση που δίνει το μήκος ℓ της ράβδου ως συνάρτηση της θερμοκρασίας t F°.

β) Σε ποια θερμοκρασία το μήκος της ράβδου είναι ίσο με 100, 012 cm;

43. ** Σε τρεις ασθενείς έχει δοθεί αντιπυρετικό φάρμακο και οι θερμοκρασίες τους σε βαθμούς C, ως συναρτήσεις του χρόνου σε ώρες, δίνονται από τους παρακάτω τύπους, οι οποίοι ισχύουν μέχρι την αποκατάσταση της φυσιολογικής θερμοκρασίας:

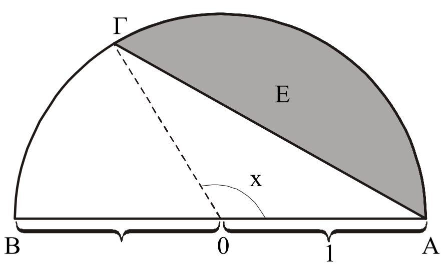
$f_1(x) = 40 - \frac{3}{2}x \qquad f_2(x) = 39 - x \qquad f_3(x) = 38 - \frac{1}{2}x$

Σε τέταρτο ασθενή έχει δοθεί διαφορετικό αντιπυρετικό, και η συνάρτηση της θερμοκρασίας του ως προς το χρόνο είναι η: $f_4(x) = f_1^{-1}(x) + 12$.

α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή x, κατά την οποία οι θερμοκρασίες των τριών πρώτων ασθενών συμπίπτουν.

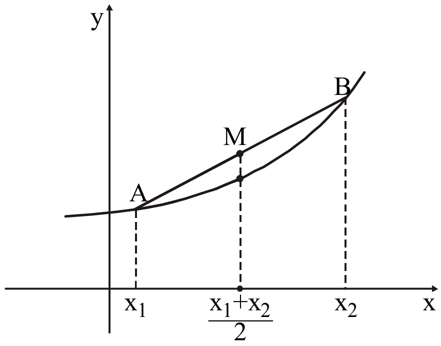
β) Ποιο αντιπυρετικό είναι πιο αποτελεσματικό έως τη δεδομένη αυτή στιγμή;

44. ** α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση της γωνίας x rad όπου $0 \le x \le \pi$ το εμβαδόν Ε του διπλανού κυκλικού τμήματος.



β) Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του μεικτογράμμου τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας x rad, όπου $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

45. ** α) Το μέσο Μ μιας χορδής ΑΒ της καμπύλης μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχο σημείο της καμπύλης. Να εκφράσετε με τη βοήθεια μιας ανισότητας την παραπάνω πρόταση.



β) Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.

γ) Ομοίως για τη συνάρτηση $g(x) = e^x$.