ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1ο

Ι. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	**Σ**	**11.**	**Σ**	**20. i)**	**Σ**
2.	**Σ**	**12.**	**Σ**	**20. ii)**	**Σ**
3.	**Σ**	**13.**	**Σ**	**21.**	**Σ**
4.	**Λ**	**14.**	**Λ**	**22.**	**Λ**
5.	**Σ**	**15.**	**Σ**	**23. i)**	**Λ**
6.	**Λ**	**16.**	**Σ**	**23. ii)**	**Λ**
7.	**Σ**	**17.**	**Λ**	**24.**	**Σ**
8.	**Σ**	**18.**	**Λ**	**25. i)**	**Σ**
9.	**Λ**	**19. i)**	**Σ**	**25. ii)**	**Σ**
10.	**Σ**	**19. ii)**	**Σ**	**26.**	**Σ**
				27.	**Σ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Β**		**15.**	**Β**		**29.**	**Δ**
2.	**Γ**		**16.**	**Β**		**30.**	**Δ**
3.	**Β**		**17.**	**Ε**		**31.**	**Α**
4.	**Δ**		**18.**	**Γ**		**32.**	**Β**
5.	**Δ**		**19.**	**Γ**		**33.**	**Γ**
6.	**Δ**		**20.**	**Γ**		**34.**	**Δ**
7.	**Δ**		**21.**	**Γ**		**35.**	**Ε**
8.	**Γ**		**22.**	**Β**		**36.**	**Γ**
9.	**Β**		**23.**	**Α**		**37.**	**Β**
10.	**Γ**		**24.**	**Δ**		**38.**	**Δ**
11.	**Α**		**25.**	**Ε**		**39.**	**Δ**
12.	**Γ**		**26.**	**Δ**		**40.**	**Β**
13.	**Γ**		**27.**	**Δ**		**41.**	**Β**
14.	**Γ**		**28.**	**Δ**			

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

11. Τη χρονική στιγμή t_0 σκάει το μπαλόνι. Άρα για $t > t_0$ η ποσότητα του αέρα που περιέχεται στο μπαλόνι είναι μηδέν. Επομένως αποκλείονται οι Β και Γ. Επειδή το μπαλόνι αρχίζει να φουσκώνει ενώ είναι άδειο, θα έχουμε για $t = 0$, $Q(t) = 0$, άρα η γραφική παράσταση ξεκινάει από το 0. Έτσι αποκλείεται και η Δ. Η παροχή του αέρα είναι σταθερή μέχρι τη στιγμή t_0, άρα είναι η Α.

13. Με την ερώτηση αυτή θέλουμε να επισημάνουμε ότι για να είναι δυο συναρτήσεις ίσες, πρέπει να έχουν ίσες τιμές για κάθε x στο (κοινό) πεδίο ορισμού τους. Οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το R. Φαίνεται εύκολα ότι $f(3) = g(3) = 10$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{5}$. Αποκλείονται έτσι οι απαντήσεις Ε, Α, Β και Δ. Απομένει η Γ (δεν χρειάζεται να εξετάσουμε για τις άλλες τιμές, αφού η Δ γράφει μόνο η ΙΙΙ και έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι ισχύει η Ι και ΙΙ).

15. Στην ερώτηση αυτή δεν μπορούμε εύκολα να αποκλείσουμε κάποιες απαντήσεις. Ο στόχος της ερώτησης είναι να «θυμηθούμε» ότι δυο συμμετρικά σημεία ως προς τον y΄y θα έχουν συντεταγμένες (x, y) και (- x, y). Έτσι, αν στον τύπο $y = 1 - 2^x$ θέσουμε όπου x το - x, βρίσκουμε $y = 1 - 2^{-x}$ και η σωστή απάντηση είναι Β.

21. Η Α δεν είναι σωστή γιατί έχει πεδίο ορισμού το R, ενώ η ευθεία του σχήματος δεν ορίζεται στο $x_0 = 3$. Άρα αναζητούμε έναν τύπο συνάρτησης που να μην ορίζεται στο $x_0 = 3$ και να δίνει (μετά από ενδεχόμενη απλοποίηση) γραφική παράσταση ευθεία. Αυτός είναι ο Γ. Η ευθεία που δίνει ο τύπος Γ είναι αυτή του σχήματος, άρα αποκλείεται και η απάντηση Ε. Ο στόχος της ερώτησης είναι προφανής: Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, βρίσκεται πριν από ενδεχόμενη απλοποίηση του τύπου.

25. Εδώ έχουμε μια ερώτηση που οι διάφορες πιθανές απαντήσεις δεν δένουν μεταξύ τους, αλλά αφορούν διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα. Θέλοντας να μεταφέρουμε όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες από το σχήμα, ζητάμε να βρούμε αυτό που δεν ισχύει. Έτσι πρέπει να εξετάσουμε όλες τις πιθανές απαντήσεις μία προς μία. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στη σωστή απάντηση που είναι η Ε.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	β
2	η
3	γ
4	γ
5	γ
6	δ
7	ε

2.

1	δ
2	γ
3	α
4	β

3.

1	γ
2	δ
3	ε
4	α

4.

1	β
2	α
3	ε
4	δ

5.

1	ζ
2	γ
3	α
4	η

6.

1	α
2	δ
3	ε
4	β

7.

1	γ
2	α
3	β
4	δ

8.

1	γ
2	δ
3	β
4	α

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $g(x_1) < g(x_2) < g(x_3) < g(x_4) < f(x_4) < f(x_3) < f(x_2) < f(x_1)$

2. h, φ, g, f

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

3. **α)** f_2, f_5 **β)** $(1, +\infty)$

4. **α)** $D_1 = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ $D_2 = [1, +\infty)$ $D_3 = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$
$D_4 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ $D_5 = D_4$ $D_6 = [1, +\infty)$

β) δεν υπάρχουν

γ) $D = (1, +\infty)$. Στο διάστημα αυτό όλες οι συναρτήσεις έχουν τύπο $f(x) = f_2(x)$.

5. **α)** $D_f = D_g = R - \{1\}$, αφού $x > 0$

β) Θα πρέπει ο αριθμητής της g να έχει παράγοντα το $x + 1$, άρα $\alpha = 2$

6. Πεδίο ορισμού του αθροίσματος είναι το διάστημα $(0, +\infty)$ και ο τύπος είναι

$$(f + g)(x) = \begin{cases} \ell nx + 2x + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x} + \ell nx, & 2 < x < 3 \\ \sqrt{x} - 2x + 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

Ομοίως εργαζόμαστε και για τις $f{\cdot}g$ και $\frac{f}{g}$

7. **α)** Πρέπει $(1 - x)(1 + x) > 0$, άρα $D_f = (-1, 1)$

β) Καταρχήν αποδεικνύουμε ότι το $\dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2} \in (-1, 1)$ ως εξής: Αν $|x_1| < 1$ και $|x_2| < 1$ τότε και $\left|\dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right| < 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 < (1 + x_1 x_2)^2 \Leftrightarrow \ldots$

Στη συνέχεια έχουμε: $f(x_1) + f(x_2) = \log\left(\dfrac{1 - x_1}{1 + x_1} \cdot \dfrac{1 - x_2}{1 + x_2}\right)$ και

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right) = \log\left(\frac{1 - \dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}}{1 + \dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}}\right) = \ldots = \log \frac{(1 - x_1)(1 - x_2)}{(1 + x_1)(1 + x_2)}$$

8. α) $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ **β)** $y = x^{\frac{1}{\ell nx}} \Leftrightarrow \ell ny = \dfrac{1}{\ell nx}\, \ell nx = 1 \Leftrightarrow y = e$

9. α) Πρέπει $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

β) Πρέπει $0 \leq x - 4 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$

γ) Πρέπει $0 \leq \ln x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq e$

10. α) Για $x = y = 0$, προκύπτει $f(0) = 0$

β) Για $x = y$ έχουμε $f(2x) = 3f(x)$

Για $y = -x$, έχουμε $f(2x) = 2f(x) + f(-x)$

απ' όπου προκύπτει $f(-x) = f(x)$

γ) Αν $x \geq 0$, ισχύει

Αν $x < 0$, $f(|x|) = f(-x) = f(x)$

11. Για $x = 2$ και $x = \frac{1}{2}$ προκύπτουν δύο σχέσεις αν τις θεωρήσουμε σαν σύστημα, έχουμε $f(2) = -\frac{7}{4}$

12. $f(x) - f(4) = (x - 4)(4x^2 + 9x + 55)$ με $|x| < 5$ και

$\left|4x^2 + 9x + 55\right| \leq 4|x|^2 + 9|x| + 55 \leq 200$, άρα

$|f(x) - f(4)| \leq 200\,|x - 4|$

13. **α)** Στο σχήμα (II) περιττή, στο σχήμα (III) άρτια και στα άλλα ούτε άρτια, ούτε περιττή

β) $g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$

γ) $f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow -f(x) \geq -f(x_0) \Leftrightarrow f(-x) \geq -f(-x_0)$ για κάθε x, άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $-x_0$

14. Αν $-\beta \leq x_1 < x_2 < -\alpha$, τότε $\alpha \leq -x_2 < -x_1 \leq \beta$ με $f(-x_2) < f(-x_1)$

$-f(x_2) < -f(x_1)$, άρα $f(x_2) > f(x_1)$

15. **α)** $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$

β) $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2 = f(1)$, άρα $f(x) \geq f(1)$

16. Αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$, άρα $\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$. Όμοια για την g.

Επομένως $\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{g(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{g(x_2)}$

17. **α)** $D_f = (-3, 5]$

β) $[0, +\infty)$

δ) Παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 και στο 5. Δεν παρουσιάζει μέγιστο

ε) $$f(x) = \begin{cases} 2x+6, & -3 < x \leq 2 \\ -x, & -2 < x \leq -1 \\ -\frac{1}{x}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 2 \\ -\frac{5}{3}x + \frac{25}{3}, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

18. **α)** Μετατόπιση της C_f κατά 1 προς τα πάνω

β) Διπλασιασμός των τιμών της f

γ) Συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x

δ) Τα τμήματα της C_f πάνω από τον άξονα x΄x και τα συμμετρικά όσων βρίσκονται κάτω από αυτόν.

19. **α)** Μετατόπιση κατά 1 προς τα πάνω

β) Συμμετρική της f ως προς τον άξονα y΄y

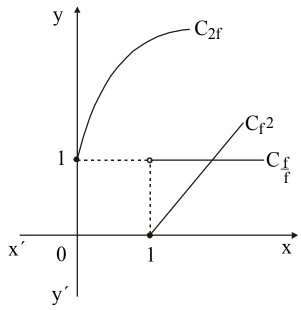
γ) Τα τμήματα κάτω από τον άξονα x΄x «ανεβαίνουν» συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, επάνω.

20. **α)** Έστω f (x) = $x^{2κ}$ και g (x) = $x^{2λ}$, κ > λ (κ, λ θετικοί ακέραιοι) δύο από τις συναρτήσεις. Οι τετμημένες των κοινών σημείων θα προκύψουν από την εξίσωση $x^{2κ} - x^{2λ} = 0 \Leftrightarrow x^{2λ}(x^{2(κ-λ)} - 1) = 0$, άρα x = 0 ή x = 1 ή x = - 1

β) Τα ίδια σημεία

21. $f^2_{(x)} = x - 1, x \geq 1$

$\left(\frac{f}{f}\right)(x) = 1, x > 1$



22. Είναι περιοδική

23. **α)** $D_f = R - \{1\}$, $D_g = R - \{-1\}$

β) $D_{f+g} = D_{fg} = R - \{-1, 1\}$ με $(f + g)(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$, $(fg)(x) = \dfrac{1}{x+1}$

γ) $(gof)(x) = \dfrac{2 - x}{x}$, ενώ $(fg)(x) = \dfrac{1}{x+1}$

δ) δεν είναι ίσες.

24. Για να ορίζεται η fofof θα πρέπει $f(x) \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $f(f(x)) \neq 1$, που ισχύει. Άρα $f(f(f(x))) = x$ (ευθεία) με $x \neq 0$ και $x \neq 1$

25. $x^x = e^{x \cdot \ell nx}$. Αν $h(x) = e^x$ και $g(x) = x\ln x$, θα είναι f = hog

26. Γραμμική συνάρτηση ονομάζεται μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$f(\kappa x_1 + \lambda x_2) = \kappa f(x_1) + \lambda f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ (1)

Για τη σύνθεση έχουμε

$(fog)(\kappa x_1 + \lambda x_2) = f(g(\kappa x_1 + \lambda x_2)) = f((\kappa g(x_1) + \lambda g(x_2)) =$

$\kappa f(g(x_1)) + \lambda f(g(x_2))$, άρα η fog είναι γραμμική

Το άθροισμα επίσης, το γινόμενο όχι

Παρατηρούμε ότι η $f(x) = \alpha x$ έχει την ιδιότητα (1)

27. **α)** Αν f, g γνησίως αύξουσες στο R, τότε αν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2)$, άρα fog γνησίως αύξουσα. Ομοίως αν f, g γνησίως φθίνουσες

β) Επειδή η f έχει την ίδια μονοτονία με την f

γ) Η $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα από το (β)

28. Έστω $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$,

άρα $f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2)$, δηλαδή $x_1 = x_2$.

Άρα η f είναι 1 - 1

29. **α)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}$ άρα $f = f^{-1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\alpha}$ και $\beta = -\frac{\beta}{\alpha}$,

απ' όπου έχουμε $\alpha^2 = 1$ και $\alpha\beta + \beta = 0$, άρα $\alpha = \pm 1$ και $\beta(\alpha + 1) = 0$.

Τελικά $f(x) = x$ και $f(x) = -x + \beta$, $\beta \in R$

β), γ) ομοίως

30. α) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1|x_2| + x_1 = x_2|x_1| + x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

(περιπτώσεις ομόσημοι - ετερόσημοι)

β) Είναι $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, & -1 < x \leq 0 \\ \dfrac{x}{1-x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$

31. Α. α) $g(x) = x + 2$, $D_g = \Delta$ **β)** $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+2x}$, $D_\varphi = \Delta$

Β. α) $f^{-1} = f$ $\quad g^{-1} = x + 2 \;\; x \in (2, +\infty)$ $\quad h^{-1} = \dfrac{1-2x}{x}$, $x \in (0, \dfrac{1}{2})$

β) $(f^{-1}og^{-1})(x) = \dfrac{1}{x-2} \;\; x \in (2, +\infty)$ $\qquad (g^{-1}of^{-1})(x) = \dfrac{1-2x}{x} \;\; x \in (0, \dfrac{1}{2})$

γ) Είναι ίσες, αφού έχουν κοινό πεδίο ορισμού και ίδιο τύπο (γενικά ισχύει $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$).

32. α) Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΑΒΓ είναι όμοια, άρα

$\dfrac{NM}{\alpha} = \dfrac{h-x}{h} \Leftrightarrow NM = \dfrac{\alpha(h-x)}{h}$. Άρα $L(x) = 2x + 2\left(\dfrac{\alpha(h-x)}{h}\right) =$

$2\alpha + 2\left(1 - \dfrac{\alpha}{h}\right)x$

β) $E(x) = NM \cdot x = \dfrac{\alpha(h-x)}{h}x = \alpha\left(1 - \dfrac{x}{h}\right)x$

33. α) $\frac{10}{x}$ και $\frac{16}{x}$ **β)** εφω = $\frac{6x}{x^2+160}$

γ) Για να έχει το ευρύτερο οπτικό πεδίο θα πρέπει η εφω να γίνει μέγιστη.

Ζητάμε το μέγιστο της παράστασης:

$y = \frac{6x}{x^2+100} \Rightarrow yx^2 - 6x + 160y = 0$. Θα πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{9}{160}$,

άρα $y_{max} = \frac{9}{160}$, για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \sqrt{160}$ m

34. α) $s(t) = \sqrt{60^2 \cdot t^2 + 80^2 \cdot t^2} = 100t$.

Άρα απομακρύνονται με ταχύτητα 100 km/h

β) $AM = \frac{s}{2} = 50t$

γ) Έστω ότι πρέπει να έχει ταχύτητα x km/h. Τότε $AM = \frac{s(t)}{2}$, άρα

$180 = \frac{\sqrt{60^2 \cdot t^2 + x^2 \cdot t^2}}{2}$. Για t = 4, έχουμε $\sqrt{x^2 + 3 \cdot 600} = 90$,

οπότε $x \approx 67$. Άρα ο δεύτερος πρέπει να ελαττώσει την ταχύτητά του κατά 13 km/h περίπου.

35. β) Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $t = -\frac{\beta}{2\alpha} = 2$ με f (2) = 20 m

γ) $\frac{4}{3}$ s, $\frac{8}{3}$ s **δ)** 10 - 5t

36. α) Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η σύνθεση της K (x) με την N (t), δηλαδή:

$K(t) = 15 + 800t - 40t^2$, t ακέραιος με $0 \leq t \leq 10$

β) $K(t) \leq 3.885$ και $0 \leq t \leq 10$, άρα $0 \leq t \leq 8{,}2$ ή $t \geq 11{,}8$, άρα t = 8

37. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 3 \\ 2.500, & 3 \leq x < 12 \\ 6.000, & x \geq 12 \end{cases}$

38. **α)** Αν x η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου και y σε Φαρενάιτ ζητάμε τα α, β ώστε y = αx + β. Από τα δεδομένα έχουμε $32 = \alpha \cdot 0 + \beta$ και $212 = \alpha \cdot 100 + \beta$, άρα β = 32 και α = 1,8

β) Η αντίστροφη σχέση της y = 1,8x + 32 είναι η $x = \dfrac{y - 32}{1{,}8}$

γ) Για y = 1,8x + 32 και x = y, προκύπτει x = y = - 40

39. **α)** $f(7) = \dfrac{14}{7} + 4 = 6$ min **β)** Από τη 14η δοκιμή

γ) Όχι, αφού πρέπει $4 + \dfrac{14}{x} < 4$, με x > 0

40. **α)** f (x) = - x + 221 **β)** f (37) = 184

41. **α)** f (7) = 19.250 **β)** f (7) - f (6) = 250

γ) Ο πληθυσμός δεν θα ξεπεράσει τις 20.000, αφού το κλάσμα $\dfrac{6}{x+1}$ για μεγάλες τιμές του x γίνεται αμελητέο

42. **α)** $\ell = 0{,}0006t + 99{,}964$ **β)** 80 °F

43. **α)** Θα πρέπει $39 - x = 40 - \frac{3}{2}x$, άρα $x = 2$ (ώρες) και $f_3(2) = f_1(2) = 37$

β) $f_1^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{80}{3}$ άρα $f_4(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{116}{3}$.

Παρατηρούμε ότι $f_4(2) = 37{,}3$ °C, ενώ $f_1(2) = f_2(2) = f_3(2) = 37$

44. **α)** $E_{τομέα} = \frac{\pi R^2 x}{2\pi} = \frac{x}{2}$, $E_{τριγώνου} = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot ημx = \frac{1}{2} ημx$,

άρα $E(x) = \frac{1}{2}(x - ημx)$

β) $H(x) = \frac{\pi}{2} - E(x)$

45. **α)** Η τεταγμένη του Μ ισούται με $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ (διάμεσος)

άρα $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

β) $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0$, ισχύει

γ) $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} \Leftrightarrow 4e^{x_1 + x_2} < (e^{x_1} + e^{x_2})^2 \Leftrightarrow (e^{x_1} - e^{x_2})^2 \geq 0$,

ισχύει