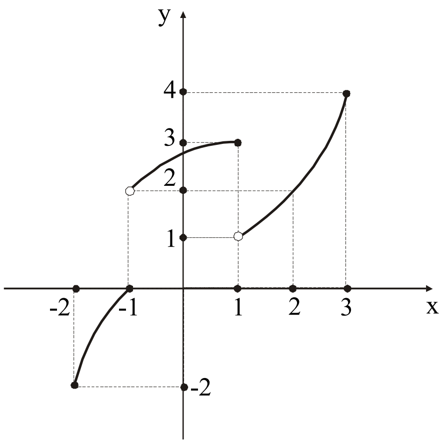
Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:



α) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ στ) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

ζ) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

2. **Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

3. ** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3} \right)$.

4. ** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\text{συν}x} \right)$.

5. ** Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{\text{ημ}^2 x} - \dfrac{1}{1 - \text{συν}x} \right)$

6. ** Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -6$ και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 10$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - g(x)}{(h(x))^2}$ β) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3f(x) - 4[g(x)]^2}{g(x) + 2f(x)}$

7. ** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ \ln(x + \beta), & x \geq -1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = -1$.

8. ** Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν ώστε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημx + ημ2x + ... + ημνx}{x} = 28.$

9. ** Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν ώστε: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημx \cdot ημ2x \cdot ... \cdot ημνx}{x^ν} = 120.$

10. ** Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ώστε:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) + ημ\dfrac{π(x-1)}{2} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{π}{2}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 1}{x - 1}$

11. ** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

α) της $f(x) = \dfrac{x - 2}{(x-1)(x+2)}$ στο $x_0 = -2$

β) της $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{|x + 1|}$ στο $x_0 = -1$

12. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x + 1}$ και $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq -1 \\ 4x - 5 & x < -1 \end{cases}$.

Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f, g, gof στο $x_0 = -1$.

13. ** α) Να δείξετε ότι : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ (1) αν και μόνο αν

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell \quad (2)$$

β) Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R ισχύει η σχέση

$f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x \in R$:

i) να βρείτε το $f(0)$

ii) αν η f είναι συνεχής στο 0, να δείξετε ότι είναι συνεχής σε όλο το R.

14. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα όρια της f στα άκρα του D_f.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

15. ** Αν $|f(x)| \le |x|$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

16. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$f(x) = \sqrt{x - 1}$ και $g(x) = \sqrt{4 - x}$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις fog και gof.

β) Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = 2$.

γ) Να εξετάσετε αν οι fog και gof είναι και αυτές συνεχείς στο $x_0 = 2$.

17. ** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \le 1 \\ 3x - 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

γ) Να βρείτε την αντίστροφή της συνάρτηση f^{-1}.

δ) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων f και f^{-1}.

18. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 2}{2^{\frac{1}{x}} + 1}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

β) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

γ) Υπάρχει τιμή του α για την οποία η f να είναι συνεχής;

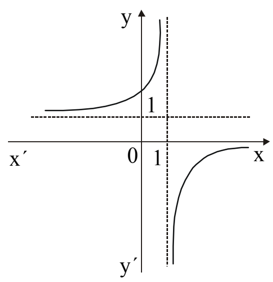
19. ** Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R είναι συνεχής:

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in R$ ισχύει ότι $\lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = 0$.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

20. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

β) Τι συμπεραίνετε για το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{f(x)}$;

21. ** Να δείξετε ότι:

α) η εξίσωση $(x + 1)\, 2^{x+1} = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (- 1, 0)

β) η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (- 1, 1).

22. ** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ell n x + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

23. ** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f (x) = x και g (x) = συν2x τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0, \frac{\pi}{4})$.

24. ** Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [0, 8] για την οποία ισχύουν ότι f (0) = 1, f (2) = - 2, f (4) = 2, f (6) = - 4 και f (8) = 1.

α) Να βρείτε πόσες φορές τουλάχιστον, η γραφική παράσταση της f θα τέμνει τον άξονα x΄x στο (0, 8).

β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα [0, 2] και [4, 6] και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα [2, 4] και [6, 8], τότε να βρείτε πόσες ρίζες θα έχει η εξίσωση f (x) = 0.

25. ** Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0, \quad \kappa, \lambda, \mu \neq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα (-1, 1).

β) Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1, ρ_2, να δείξετε ότι: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.

26. ** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{\nu+1} - 2x + 1$ για $\nu \geq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το P (x) διαιρείται με το x - 1.

β) Να βρείτε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

γ) Αν Q (x) το παραπάνω πηλίκο, να αποδείξετε ότι το Q (x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

δ) Να δικαιολογήσετε ότι και το P (x) έχει την ίδια ρίζα στο διάστημα (0, 1).

27. ** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο [0, α] με f (0) = f (α).

α) Να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x) - f(\frac{\alpha}{2} + x)$ είναι συνεχής στο $(0, \frac{\alpha}{2})$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(\frac{\alpha}{2} + x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\alpha}{2})$.

28. ** Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει μία μόνο ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (με τη σειρά που δίνονται): $[0, 1]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

β) Να παραστήσετε τα διαστήματα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Να περιγράψετε, με βάση το (β), μια διαδικασία (αλγόριθμο) μέσω της οποίας μπορούμε να προσεγγίσουμε μια ρίζα ενός πολυωνύμου.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$. Να βρείτε τη ρίζα με προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού (με υπέρβαση). Να κάνετε χρήση υπολογιστή τσέπης.

29. ** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{3}$$

30. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στα διαστήματα $[1, \frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2}, 2]$.

β) Με τη βοήθεια του πρώτου ερωτήματος να δικαιολογήσετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ βρίσκεται στο διάστημα $(1, \frac{3}{2})$, ενώ ο $\sqrt{3}$ στο διάστημα $(\frac{3}{2}, 2)$.

31. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - 2} - \sqrt{6 - x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$.

32. ** Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [α, β]. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το [α, β], τότε

α) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in [α, β]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$

β) να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό.

33. ** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = γ \in R$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = δ \in R$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ell n x_0 = 1$.

34. ** Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in [-1, 0]$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

35. ** Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 10] και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδικές ρίζες το 3 και το 7.

α) Αν υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) > 0$ με $x_0 < 3$, να δείξετε ότι η $f(x) > 0$ για κάθε $x < 3$.

β) Αν υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) < 0$ με x_0 τέτοιο ώστε $3 < x_0 < 7$, να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε x: $3 < x < 7$.

36. ** Η ανάβαση στην ψηλότερη κορυφή του Ολύμπου (Μύτικας, 2.917 μ.) γίνεται συνήθως από τη θέση "Πριόνια" και διαρκεί για ένα μέσο ορειβάτη 6 ώρες. Η κατάβαση διαρκεί επίσης 6 ώρες. Ένας ορειβάτης ξεκινάει από τα

“Πριόνια” στις 6 το πρωί και χωρίς να σταματήσει βρίσκεται σε 6 ώρες στην κορυφή, όπου και διανυκτερεύει. Την άλλη μέρα ξεκινάει στις 6 το πρωί την κατάβαση από τον “Μύτικα” και σε 6 ώρες, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή, βρίσκεται στα “Πριόνια”. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.

37. ** Αν f είναι μια συνάρτηση, τότε λέγοντας χορδή της f εννοούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα ανήκουν στη γραφική παράσταση της f. Έστω ότι f είναι μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και με $f(0) = f(1) = 0$.

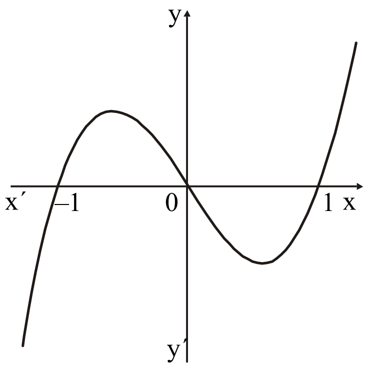
α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της f με μήκος $\frac{1}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της f με μήκος $\frac{1}{\nu}$, όπου $\nu = 2, 3, 4, \ldots$

38. ** Προεκτείνουμε την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου προς το Α και έστω Μ τυχόν σημείο στην προέκταση. Από το Μ φέρνουμε την εφαπτομένη στον κύκλο και έστω Τ το σημείο επαφής. Από το Τ φέρνουμε την κάθετο στην ΟΑ και έστω Ν το ίχνος της καθέτου. Αν το Μ κινείται προς το Α, να δείξετε ότι ο λόγος $\frac{AN}{AM}$ τείνει στο 1.

39. ** Από σημείο Μ φέρνουμε τις εφαπτόμενες σε έναν κύκλο (Ο, R) και έστω Α, Β τα σημεία επαφής. Η εφαπτομένη στο μέσον Ε του τόξου ΑΒ τέμνει τις ΜΑ και ΜΒ στα Γ και Δ. Να δείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $\frac{(\text{MAB})}{(\text{M}\Gamma\Delta)}$ τείνει στο 4, καθώς το Μ κινείται προς το Ε.

40. ** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε τα όρια:



α) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

41. ** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + (\mu + 1)x + 1}{\mu x^2 + 1}$, αν $\mu \in R$

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x - \mu)$, αν $\lambda, \mu \in R$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\alpha^x}{\alpha^x + 1}$, αν $\alpha > 0$ δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}$, αν $\alpha > 0$

42. ** Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

β) $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot \eta\mu^\rho \frac{1}{x})$ με $\rho \in N^*$ και $\rho \geq 2$

43. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ell n \left(\frac{x^2 + \kappa^2}{x} \right)$, $\kappa > 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η $f(x) - \ell nx > 0$ και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ell nx)$.

44. ** Να βρείτε ένα κατάλληλο ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ισχύει:

α) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 5$.

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = 20$.

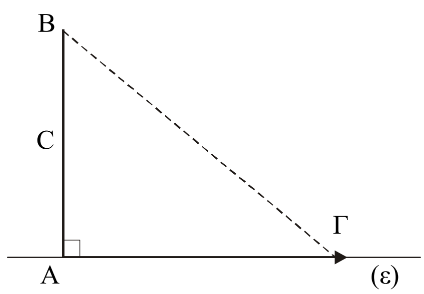
γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 2$.

ε) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$.

ζ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

45. ** Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του διπλανού σχήματος έχει σταθερό μήκος C. Το σημείο Γ κινείται απομακρυνόμενο από το Α επάνω στην (ε). Να αποδείξετε ότι τα μήκη των ΒΓ και ΑΓ τείνουν να γίνουν ίσα.

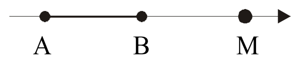


46. ** Αν $f(x) = \ell n \frac{x - 3}{2x}$, να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

β) τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

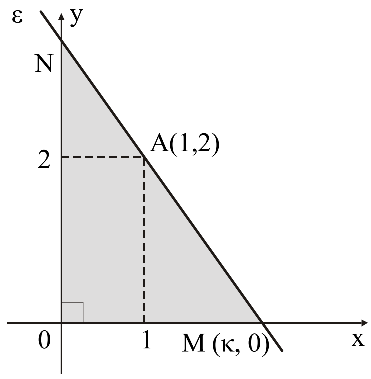
47. ** Δίνεται ένα τμήμα ΑΒ και στην προέκτασή του προς το Β παίρνουμε σημείο Μ. Να βρείτε το όριο του λόγου $\dfrac{AM}{BM}$, καθώς το Μ απομακρύνεται στο άπειρο.



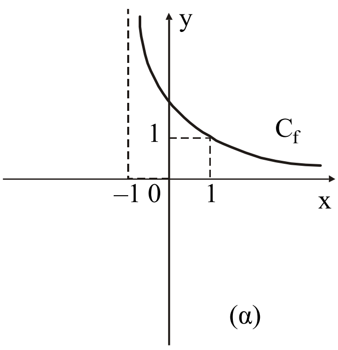
48. ** Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α (1, 2) και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οx και Oy στα Μ και Ν αντιστοίχως.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ ως συνάρτηση της τετμημένης κ του σημείου Μ.

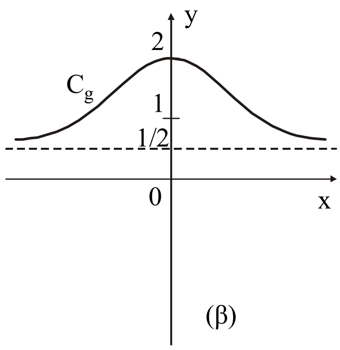
β) Να βρείτε το όριο του εμβαδού όταν $\kappa \to +\infty$ και όταν $\kappa \to 1$.



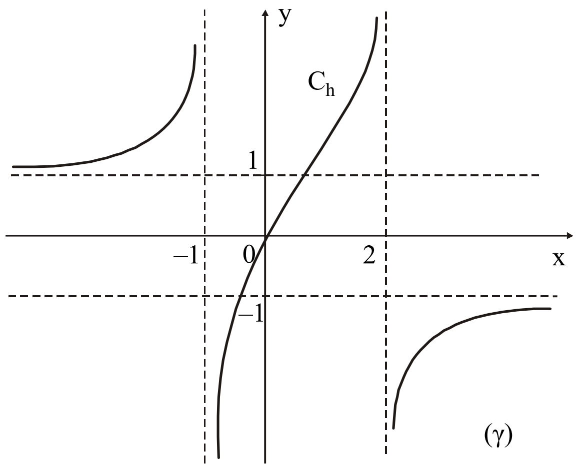
49. ** Οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g και h φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



(α)



(β)

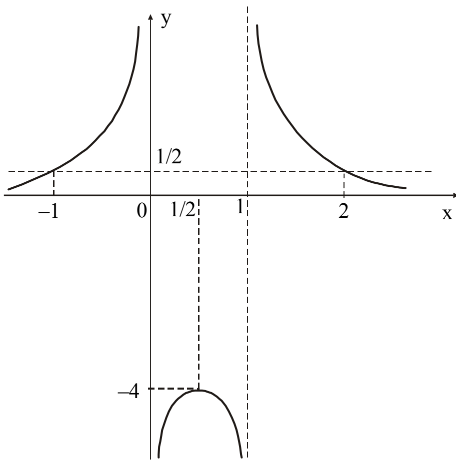


α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.

β) Να βρείτε τα όρια:

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

50. ** Η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πρόσημο της f.

β) Να βρεθούν τα όρια:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$,

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$

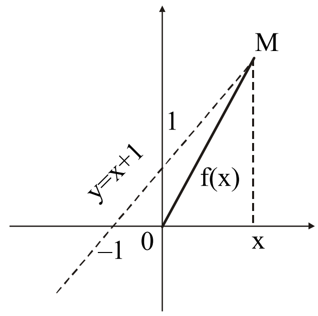
γ) Με τη βοήθεια των παραπάνω να προσδιορίσετε τις οριακές τιμές της $\dfrac{1}{f}$ στα σημεία του ερωτήματος (β).

δ) Να βρείτε τον τύπο της f, αν ξέρετε ότι είναι ένας από τους παρακάτω:

$$f_1(x) = \frac{2x+1}{6x+5}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2+x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{2|x^2-1|}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x^2-x}$$

ε) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

51. ** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ευθείας (ε) με εξίσωση $y = x + 1$ και το σημείο της Μ με τετμημένη x. Η απόσταση από το σημείο Ο δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = (OM)$ για κάθε $x \in R$.



α) Για ποια τιμή του x ισχύει $f(x) = 1$;

β) Για ποια τιμή του x η απόσταση γίνεται ελάχιστη;

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και να εξηγήσετε τα αποτελέσματα γεωμετρικά (στο σχήμα).

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = 0$.

52. ** Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12% και εκτιμάται ότι σε x έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = \dfrac{16x+36}{2x+3}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 8 + \dfrac{12}{2x+3}$.

β) Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%.

γ) Μετά από αρκετά χρόνια, ποιο θα είναι περίπου το ποσοστό ανεργίας;

53. ** Σε μια συνεχή βροχόπτωση διαπιστώθηκε ότι η ταχύτητα υ μιας σταγόνας της βροχής, ως συνάρτηση του χρόνου t, δίνεται από τη σχέση:

$$υ(t) = κ(1 - e^{-t})$$

όπου κ μια θετική σταθερά.

α) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση υ όταν $t \geq 0$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{t \to +\infty} υ(t)$.

γ) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά κ.

54. ** Ο αριθμός των βακτηριδίων σε μια καλλιέργεια t ώρες μετά την έναρξη ενός πειράματος δίνεται, κατά προσέγγιση σε χιλιάδες από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2}+1}, & 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{1}{5}e^3 \cdot t + \frac{9}{5}e^3, & t > 4 \end{cases}$$

(σημειώνεται ότι 4 ώρες μετά την έναρξη του πειράματος εισήχθη μια τοξική ουσία μέσα στην καλλιέργεια).

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά την έναρξη του πειράματος (θεωρήστε $e \approx 2{,}718$).

β) Να εξετάσετε αν μπορούμε να εκτιμήσουμε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 4$.

γ) Πότε ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα εξαφανιστεί;

δ) Να αποδείξετε ότι σε δύο χρονικές στιγμές του πειράματος ο αριθμός των βακτηριδίων θα είναι 18.950.

55. ** Ο πληθυσμός μιας καλλιέργειας βακτηριδίων αναπτύσσεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$P\,(t) = 6\left(\frac{t^2+5}{19t+25}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{χιλιάδες βακτηρίδια}$$

όπου t ο χρόνος σε ημέρες (από τη στιγμή της δημιουργίας της).

Πέντε ημέρες μετά εισάγεται στο περιβάλλον της καλλιέργειας ένα φάρμακο που έχει ως αποτέλεσμα η ανάπτυξη του πληθυσμού να γίνεται πλέον σύμφωνα με τον τύπο:

$$P\,(t) = 6\left(\frac{t+5}{t^2+12t+45}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{χιλιάδες βακτηρίδια}$$

όπου t ο χρόνος σε ημέρες αμέσως μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Να βρείτε μια συνάρτηση που να δίνει τον πληθυσμό της καλλιέργειας τις 10 πρώτες ημέρες από τη δημιουργία της.

β) Να βρείτε τον πληθυσμό σε κλάσματα του δευτερολέπτου πριν τη χορήγηση του φαρμάκου.

γ) Να βρείτε τον πληθυσμό της κλάσματα του δευτερολέπτου μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση του (α) ερωτήματος είναι συνεχής (στο πεδίο ορισμού της).

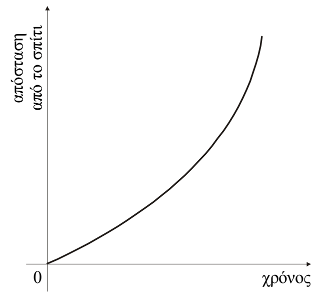
56. ** Σε ένα σχολείο άρχισε να κυκλοφορεί μεταξύ των μαθητών μια φήμη για την πενθήμερη εκδρομή του σχολείου. Ο αριθμός N (t) των μαθητών που άκουσαν τη φήμη βρέθηκε ότι μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$N\,(t) = M\,(1 - e^{-0,5t})$$

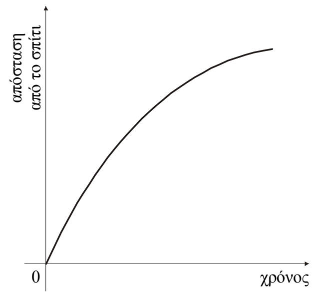
όπου M ο συνολικός αριθμός των μαθητών του σχολείου και t ο χρόνος σε ημέρες (από τη στιγμή που πρωτοακούστηκε η φήμη).

Ένας μαθητής υποστήριξε τελικά ότι όλοι οι συμμαθητές του θα ακούσουν τη φήμη. Πώς το σκέφτηκε αυτό;

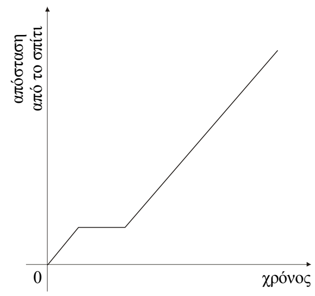
57. ** Δίνονται τα διαγράμματα:



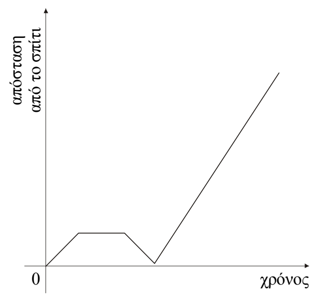
Διάγραμμα I



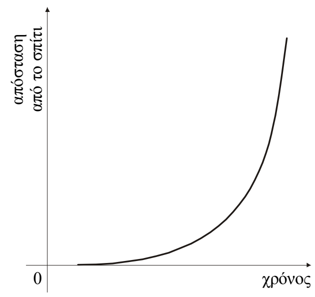
Διάγραμμα II



Διάγραμμα III



Διάγραμμα IV



Διάγραμμα V

και οι αφηγήσεις τριών μαθητών:

Μαθητής Α: Το πρωί ξεκίνησα στην αρχή με αργό ρυθμό για το σχολείο, όταν όμως κατάλαβα ότι επρόκειτο να αργήσω επιτάχυνα.

Μαθητής Β: Πήγαινα κανονικά μέχρι τη στιγμή που κλατάρισε ένα λάστιχο του ποδηλάτου μου. Το επισκεύασα επί τόπου και συνέχισα με την ίδια ταχύτητα.

Μαθητής Γ: Δεν είχα απομακρυνθεί πολύ, όταν θυμήθηκα ότι είχα αφήσει στο σπίτι το τετράδιο των Μαθηματικών. Αναγκάστηκα να γυρίσω πίσω να το πάρω και μετά ξεκίνησα πάλι για το σχολείο.

α) Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε αφήγηση το διάγραμμα που της ταιριάζει:

Αφήγηση	Α	Β	Γ
Διάγραμμα			

β) Γράψτε από μια αφήγηση που να ταιριάζει στα υπόλοιπα διαγράμματα.

Μαθητής Δ:

(Διάγραμμα …)

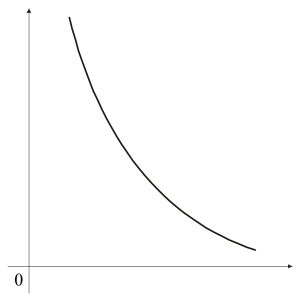
Μαθητής Ε:

(Διάγραμμα ……)

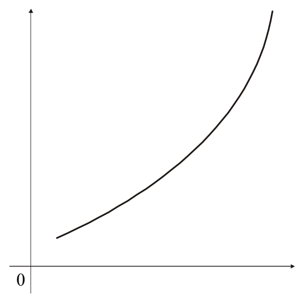
58. ** Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών των συναρτήσεων:

x	**f (x)**	**g (x)**	**h (x)**	**φ (x)**	**σ (x)**
1	23	23	23	33	33
2	24	27	25	32	29
3	26	30	27	30	26
4	29	32	29	27	24
5	33	33	31	23	23

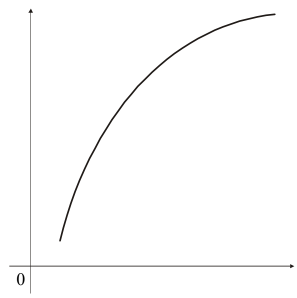
και τα διαγράμματα:



Διάγραμμα Ι



Διάγραμμα ΙΙ



Διάγραμμα ΙΙΙ

α) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε διάγραμμα την κατάλληλη από τις παραπάνω συναρτήσεις συμπληρώνοντας τον πίνακα:

Διάγραμμα	**I**	**II**	**III**
Συνάρτηση			

β) Να φτιάξετε ένα σχεδιάγραμμα για καθεμιά από τις υπόλοιπες συναρτήσεις.

59. ** Να βρείτε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε f (- 1) = - 1, f (1) = 1, f συνεχής στο διάστημα (-1, 1), αλλά να μην υπάρχει αριθμός γ μεταξύ του - 1 και του 1 με f (γ) = 0.