ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΙΙ. ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	**Λ**
2.	**Λ**
3.	**Λ**
4.	**Σ**
5.	**Σ**
6.	**Λ**
7.	**Λ**
8.	**Λ**
9.	**Σ**
10.	**Λ**
11.	**Σ**
12.	**Λ**
13.	**Σ**
14.	**Λ**

15.	**Σ**
16.	**Σ**
17.	**Λ**
18.	**Σ**
19.	**Σ**
20.	**Σ**
21.	**Λ**
22.	**Σ**
23.	**Σ**
24.	**Σ**
25.	**Σ**
26.	**Σ**

27.	**Λ**
28.	**Σ**
29.	**Σ**
30.	**Σ**
31.	**Σ**
32.	**Σ**
33.	**Σ**
34.	**Λ**
35.	**Σ**
36.	**Σ**
37.	**Λ**
38.	**Σ**
39.	**Λ**
40.	**Σ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Δ**	**12.**	**Γ**	**23.**	**Β**
2.	**Γ**	**13.**	**Γ**	**24.**	**Δ**
3.	**Γ**	**14.**	**Ε**	**25.**	**Ε**
4.	**Δ**	**15.**	**Γ**	**26.**	**Γ**
5.	**Γ**	**16.**	**Δ**	**27.**	**Γ**
6.	**Γ**	**17.**	**Β**	**28.**	**Γ**
7.	**Ε**	**18.**	**Ε**	**29.**	**Β**
8.	**Γ**	**19.**	**Δ**	**30.**	**Β**
9.	**Β**	**20.**	**Β**	**31.**	**Δ**
10.	**Β**	**21.**	**Ε**	**32.**	**Γ**
11.	**Γ**	**22.**	**Δ**		

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

13. Προσπαθούμε να εφαρμόσουμε την αρχή του αποκλεισμού. Η απάντηση Α αποκλείεται γιατί η f δεν είναι συνεχής στο α. Η Β αποκλείεται γιατί η g δεν έχει ετερόσημες τιμές, το ίδιο και η Ε. Η Δ γιατί η φ δεν είναι συνεχής σε κάποιο σημείο. Μένει η σωστή απάντηση Γ (δεν μας ενδιαφέρει αν η h δεν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο). Σημειώνουμε επίσης ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει και στις περιπτώσεις Α και Δ.

14. Εδώ πρέπει να προσέξουμε ότι στην εκφώνηση αναφέρεται η λέξη πάντοτε, η οποία βέβαια είναι απλώς και μόνο για έμφαση. Στα Μαθηματικά, όταν λέμε ότι κάτι ισχύει, εννοούμε ότι ισχύει πάντοτε. Έτσι δεν προκύπτει από τα δεδομένα ότι η f έχει μη αρνητικές τιμές, δεν υπάρχουν δεδομένα ώστε να ισχύει η Β ή η Γ και η Δ, άρα η σωστή απάντηση είναι η Ε.

31. Το 10^{2004} είναι πολύ μεγάλος αριθμός (πρακτικά + ∞). Άρα η τιμή της f για $x = 10^{2004}$ δηλαδή το f (10^{2004}) προσεγγίζει ικανοποιητικά από το $\lim_{x \to +\infty} f(x) \ \frac{1}{4}$ = 0,25. Έτσι η σωστή απάντηση είναι η Δ.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	γ
2	ε
3	β

2.

1	γ
2	δ
3	α
4	ε

3.

1	γ
2	δ
3	ε
4	α
5	β

4.

1	α
2	β
3	ε
4	δ

5.

1	β
2	ε
3	α

6.

1	δ
2	γ
3	ε
4	α

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $\mu \leq \lambda \leq \kappa \leq \xi \leq \nu$

2. γ, δ, α, ε, β.

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** 2 **β)** 0 **γ)** 2 **δ)** 3 **ε)** 1
στ) 2 **ζ)** 4

2. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (με διάσπαση του κλάσματος σε δύο κλάσματα)

3. - 1

4. Είναι

$$\lim_{x\to 0} \frac{συνx - 1}{xσυνx} = \lim_{x\to 0} \frac{συν^2 x - 1}{xσυνx\,(συνx + 1)} = \lim_{x\to 0}\left(- εφx \cdot \frac{ημx}{x} \cdot \frac{1}{συνx + 1}\right) = 0$$

5. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{ημ^2 x} - \frac{1}{1 - συνx}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2 - (1 + συνx)}{1 - συν^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + συνx} = \frac{1}{2}$$

6. **α)** $\frac{1}{10}$ **β)** - 66

7. Θέτουμε $g(x) = \dfrac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}$, $x < -1$, άρα $\alpha x + 1 = (x^2 - 1)\, g(x)$

άρα $\lim\limits_{x \to -1} (\alpha x + 1) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 1)\, g(x) \Rightarrow -\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$.

Άρα θα πρέπει $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\dfrac{1}{2}$, οπότε $\beta = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

8. $1 + 2 + \ldots + \nu = \dfrac{\nu(\nu + 1)}{2} = 28$ άρα $\nu = 7$

9. $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \nu = 120 \Rightarrow \nu = 5$

10. **α)** Θέτουμε $f(x) + \eta\mu \dfrac{\pi(x-1)}{2} - 1 = \left(\sqrt{x} - 1\right) g(x)$, οπότε $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

β) Είναι $f(x) - 1 = \left(\sqrt{x} - 1\right) g(x) - \dfrac{\eta\mu \dfrac{\pi(x-1)}{2}}{x - 1}$

άρα $\dfrac{f(x) - 1}{x - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1} g(x) - \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\eta\mu \dfrac{\pi(x-1)}{2}}{\dfrac{\pi(x-1)}{2}}$

άρα $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 1}{x - 1} = -\dfrac{\pi}{4}$

11. πλευρικά όρια

12. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$

Η g δεν είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ (με πλευρικά όρια)

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$, η g είναι συνεχής στο $f(-1) = 0$, άρα η gof είναι συνεχής στο $x_0 = -1$

13. **α)** Θέτουμε $x - x_0 = h$ **β)** $f(0) = 0$ και χρήση του (α)

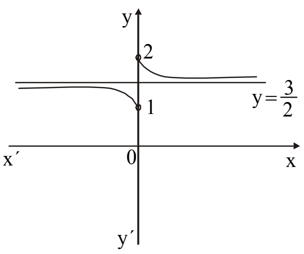
14. **α)** $D_f = (0, e)$ **β)** στο 0^+ το $+\infty$, στο e^- το $-\infty$

δ) R **γ)** με τον ορισμό

15. Ισχύει $-|x| \leq f(x) \leq |x|$, άρα $f(0) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

18. **α)** $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, 2$

β)



γ) όχι, γιατί το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει

19. **α)** Είναι $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ και $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 - h) = f(x_0)$

β) δεν ισχύει το αντίστροφο

20. **α)** $+\infty, -\infty, 1, 1$ **β)** 0

21. **α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x + 1) \cdot 2^{x+1} - 1$ και εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano

β) Θεώρημα Bolzano στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$

22. $f(x) = \ell nx + e^x$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$,

άρα υπάρχει $\alpha < 1$, ώστε $f(\alpha) < 0$

$f(1) > 0$, θεώρημα Bolzano στο $[\alpha, 1]$

23. $h(x) = \sigma\upsilon\nu 2x - x$ και θεώρημα Bolzano στο $[0, \frac{\pi}{4}]$

24. **α)** μία τουλάχιστον φορά σε κάθε ένα από τα διαστήματα (0, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 8)

β) τέσσερις ρίζες

25. **α)** $f(x) = \kappa^2 (x^2 - 1) + \lambda^2 x (x - 1) + \mu^2 x (x + 1)$, $x \neq 0, -1, 1$, θεώρημα Bolzano στα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$, και η μοναδικότητα προκύπτει από το βαθμό της $f(x)$

β) Να κάνετε χρήση των τύπων $\rho_1 + \rho_2$ και $\rho_1 \cdot \rho_2$, δεδομένου ότι η $f(x)$ είναι τριώνυμο.

26. $P(x) = x(x^\nu - 1) - (x - 1) = (x - 1)$ $Q(x)$ με $Q(0) = -1$, $Q(1) = \nu$

27. **α)** Σύνθεση συνεχών **β)** θεώρημα Bolzano για την $h(x)$ στο $[0, \frac{\alpha}{2}]$

28. **β)** Βρίσκουμε κάθε φορά το μέσον του διαστήματος και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano σε κάθε υποδιάστημα.

29. $h(x) = 3f(x) - f(\alpha) - f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και θεώρημα Bolzano στο $[\alpha, \beta]$

30. **β)** $y = 2 \in [1, \frac{9}{4}]$, $x^2 = 2$ άρα ο $x = \sqrt{2} \in (1, \frac{3}{2})$.

Όμοια $3 \in (\frac{9}{4}, 4)$ άρα $\sqrt{3} \in (\frac{3}{2}, 2)$.

31. **α)** $D_f = [2, 6]$ **α)** με τον ορισμό **δ)** $f(A) = [-2, 2]$

ε) $\frac{3}{2} \in f(A)$ και f γνησίως αύξουσα στο [2, 6]

32. **α)** Για την $g(x) = f(x) - x$, ισχύει $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \geq 0$ και $g(\beta) \leq 0$

β) Η γραφική παράσταση της f τέμνει την $y = x$

33. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ με $g(x) = f(x) + e^{x+1} + \ell nx - 1$

και g συνεχής και γνησίως αύξουσα

35. **α)** Αν υπάρχει $x_1 < 3$ ώστε $f(x_1) < 0$ τότε άτοπο από το θεώρημα Bolzano. Ομοίως αν $f(x_1) > 0$ με $3 < x_1 < 7$.

36. Έστω f (t), g (t) οι συναρτήσεις που εκφράζουν τη θέση του ορειβάτη κατά την ανάβαση και κατάβαση π.χ. την απόσταση από τα πριόνια. Θεωρήστε την h (x) = f (t) - g (t) στο [6, 12], τότε h (6) = f (6) - g (6) = 0 - 2977, h (12) = f (12) - g (12) = 2917 - 0.

37. **α)** $h(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x) \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

β) $h(x) = f\left(x + \frac{1}{\nu}\right) - f(x) \quad x \in \left[0, \frac{\nu - 1}{\nu}\right]$ και θεώρημα Bolzano

38. ΟΤ ⊥ ΤΜ, φέρνουμε ΑΡ ⊥ ΤΜ. Τότε ΑΝ = ΑΡ. (Τα τρίγωνα ΤΝΑ και ΤΡΑ είναι ίσα).

Άρα $\frac{AN}{AM} = \frac{AP}{AM} = $ ημω, όπου $\hat{\omega} = O\hat{M}T$.

Καθώς το Μ πλησιάζει το Α, η γωνία $\omega \to \frac{\pi}{2}$,

άρα $\lim\limits_{M \to A} \frac{AN}{AM} = \lim\limits_{\omega \to \frac{\pi}{2}} \eta\mu\omega = 1$

39. $\frac{(MAB)}{(M\Gamma\Delta)} = \left(\frac{MN}{ME}\right)^2$, όπου ΜΝ το ύψος του τριγώνου ΜΑΒ, αλλά, από την προηγούμενη άσκηση (38), $\frac{EN}{EM} \to 1$,

άρα $\frac{EN}{EM} + 1 \to 2$, άρα $\frac{EM + EN}{EM} \to 2$, άρα

$$\frac{(MAB)}{(M\Gamma\Delta)} = \left(\frac{ME + EN}{ME}\right)^2 = \left(1 + \frac{EN}{EM}\right)^2 = 2^2 = 4$$

40. **α)** $-\infty$ **β)** 0 **γ)** 0 **δ)** 0 **ε)** $+\infty$

41. **α)** Να διακρίνετε περιπτώσεις για $\mu < 0$ ή $\mu > 2$, $0 < \mu < 2$, $\mu = 2$, $\mu = 0$

β) για $\lambda = 1$, για $\lambda \neq 1$

γ) περιπτώσεις για $0 < \alpha < 1$, $\alpha < 1$, $\alpha = 1$

δ) για $0 < \alpha < 2$, $\alpha > 2$, $\alpha = 2$

42. **α)** 1 **β)** 0 **γ)** 0

43. **α)** $(0, +\infty)$ **β)** $+\infty, +\infty$ **γ)** $f(x) - \ln x = \ln \dfrac{x^2+\kappa^2}{x^2} > 0,$

αφού $\dfrac{x^2+\kappa^2}{x^2} > 1, \quad \lim\limits_{x \to +\omega} (f(x) - \ln x) = \ln 1 = 0$

44. **α)** $f(x) = \eta\mu 5x$, $g(x) = x$

β) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $g(x) = 20x^2 + x + 1$ κ.ο.κ.

45. Αν ΑΓ = x, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} (\text{ΒΓ} - \text{ΑΓ}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+c^2} - x) = \ldots = 0$

ή $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+c^2}}{x} = 1$

47. Αν ΑΒ = α και ΑΜ = x τότε ΒΜ = x - α, $x \to +\infty$

οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{ΑΜ}}{\text{ΒΜ}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x - \alpha} = 1$

48. Πρέπει $x > 1$. Η ευθεία ΑΜ : $2x + y(\kappa - 1) - 2\kappa = 0$.

Για $x = 0$, $y = \dfrac{2\kappa}{\kappa - 1}$ και $E_{MON} = \dfrac{\kappa^2}{\kappa - 1} = E(\kappa)$

$\lim\limits_{\kappa \to +\infty} E(\kappa) = +\infty$ και $\lim\limits_{\kappa \to 1^+} E(\kappa) = +\infty$

50. **α)** $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$f(x) > 0$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$f(x) < 0$ για $x \in (0, 1)$

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = -4$

γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{1}{4}$

δ) ο μόνος τύπος που ταιριάζει με τα όρια που έχουμε βρει είναι ο

$f_4(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$

ε) $g(x) = x(x - 1)$

51. **α)** $x = 0$ ή $x = -1$

β) Πρέπει να γίνει ελάχιστη η $g(x) = x^2 + (x + 1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$. Για

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2}$$

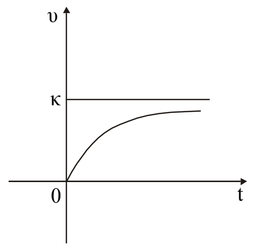
γ) $+\infty$, $+\infty$. Η απόσταση ΟΜ γίνεται άπειρη, όταν $x \to \pm\infty$

δ) με συζυγή παράσταση

52. **β)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 8$, άρα $f(x) < 8$

γ) Μετά από «αρκετά» χρόνια θα είναι $\lim \dfrac{12}{2x+3} = 0$, άρα το ποσοστό θα είναι 8%.

53. **α)**



β) $\lim\limits_{t \to +\infty} \kappa(1 - e^{-t}) = \kappa$

γ) Σε συνεχή βροχόπτωση μεγάλης διάρκειας η ταχύτητα της σταγόνας είναι περίπου ίση με κ.

54. **α)** $f(0) = e$ (2.718 βακτηρίδια)

β) $\lim\limits_{t \to 4^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 4^+} f(t) = e^3$ (20.079 περίπου)

γ) $f(t) = 0$ οπότε $t = 9$

δ) $f(0) = 2.718$ $\quad f(4) = 20.079$. Είναι $2.718 < 18.950 < 20.079$, άρα κάποια στιγμή μεταξύ 0 και 4 ώρες ο αριθμός θα είναι 18.950. Ομοίως στο $(4, 9)$

55. **α)** $P(t) = \begin{cases} 6\left(\dfrac{t^2+5}{19t+25}\right)^{\frac{1}{2}}, & 0 \le t \le 5 \\ 6\left(\dfrac{(t-5)+5}{(t-5)^2+12(t-5)+45}\right)^{\frac{1}{2}}, & 5 < t \le 10 \end{cases}$

β) $\lim\limits_{t \to 5^-} P(t) = 3$ (χιλιάδες) **γ)** $\lim\limits_{t \to 5^+} P(t) = 2$ (χιλιάδες)

δ) όχι, δεν είναι στο $x_0 = 5$

56. $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = M$, άρα μετά από «αρκετό» χρόνο όλοι οι μαθητές θα ακούσουν την φήμη (Για t = 30 ημέρες το e^{-15} είναι ήδη πολύ μικρό)

57. α)

Αφήγηση	**Α**	**Β**	**Γ**
Διάγραμμα	I	III	IV

β) Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι και η εξής:

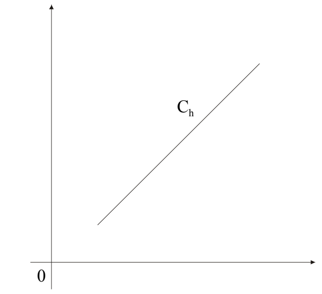
Μαθητής Δ (Διάγραμμα ΙΙ): *Ξεκίνησα βιαστικά όταν όμως κατάλαβα ότι έχω μπροστά μου πολύ χρόνο έκοψα ταχύτητα.*

Μαθητής Ε (Διάγραμμα V): *Μόλις βγήκα από το σπίτι πρόσεξα ότι είχα ένα λάστιχο κλαταρισμένο. Το επιδιόρθωσα και ξεκίνησα βιαστικά επιταχύνοντας.*

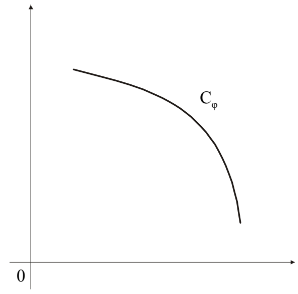
58. α)

Διάγραμμα	**I**	**II**	**III**
Συνάρτηση	σ (x)	f (x)	g (x)

β) Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι και η εξής:



Διάγραμμα IV



Διάγραμμα V

59. Μια τέτοια συνάρτηση θα μπορούσε να είναι η παρακάτω: