Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** α) Να αποδείξετε ότι αν τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

β) Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{αν } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

στο σημείο $x_0 = 1$ εφαρμόζοντας το προηγούμενο συμπέρασμα.

2. ** Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = g'(x_0)$ και $f(x_0) = g(x_0)$. Αν ισχύει $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι και η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα ισχύει $h'(x_0) = f'(x_0)$.

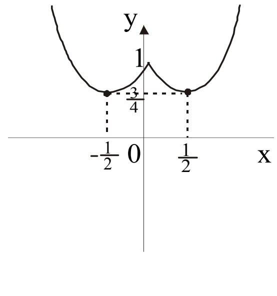
3. ** Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(x) = |x-1| \cdot g(x)$, $x \in R$. Να βρεθεί η τιμή $g(1)$.

4. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + x + 2$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη

α) στο σημείο $x_0 = 3$ και

β) στο σημείο $x_0 = 4$.

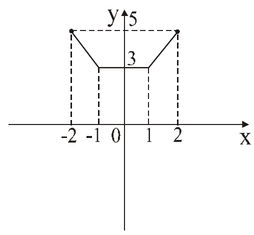
5. ** Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2 - |x| + 1$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f'.

6. ** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με τετμημένες - 1, 1, $\frac{3}{2}$.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f ΄.

7. ** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 1$ (εφόσον υπάρχει), σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$.

β) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.

γ) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 4$.

δ) είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

ε) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

στ) είναι παράλληλη στον άξονα y΄y.

ζ) άγεται από το σημείο (- 1, 0).

8. ** Να βρείτε την εφαπτομένη (αν υπάρχει) των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο σημείο:

α) $f(x) = \ln x$ στο (1, 0)

β) $f(x) = |2 - x|$ στο (2, 0)

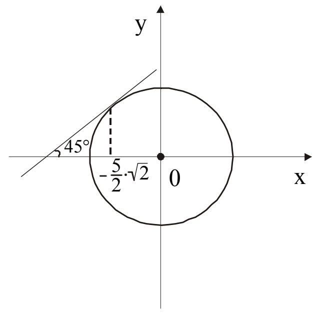
γ) $f(x) = \sqrt{x^3}$ στο (0, 0)

δ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ στο (0, 0)

ε) $f(x) = x\sqrt{x}$ στο (0, 0)

στ) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ στο $\left(-2, \frac{3}{4}\right)$

9. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου του διπλανού σχήματος.



10. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ$, $α \neq 0$. Να βρείτε τη συνθήκη για τα α, β, $γ \in R$, ώστε η C_f να μην έχει σε κανένα της σημείο οριζόντια εφαπτομένη.

11. ** α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6x + 8$, να φέρετε τις εφαπτόμενες $ε_1$, $ε_2$ της C_f στα σημεία τομής της C_f με τον x΄x και να δικαιολογήσετε από το σχήμα γιατί οι εφαπτόμενες τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 3$.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής $y = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ με $Δ > 0$, στα σημεία τομής της με τον άξονα x΄x τέμνονται στον άξονα συμμετρίας της παραβολής ($x = -\frac{β}{2α}$).

Σημείωση: *Με βάση την κεντρική ιδέα αυτής της άσκησης (συμμετρία) έχουμε τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε όμοιες ασκήσεις που αναφέρονται, για παράδειγμα, σε άρτιες παραγωγίσιμες συναρτήσεις.*

12. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(αx)}{x}$ με $α > 0$ και $x > 0$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, καθώς μεταβάλλεται το α, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

13. ** Έστω η συνάρτηση f (x) = $(x - 1)^2$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης, σε οποιοδήποτε σημείο της, δεν έχει με αυτήν άλλο κοινό σημείο.

Σημείωση: *Η παραπάνω άσκηση θα μπορούσε να γενικευθεί για οποιοδήποτε τριώνυμο.*

14. ** Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η σχέση:

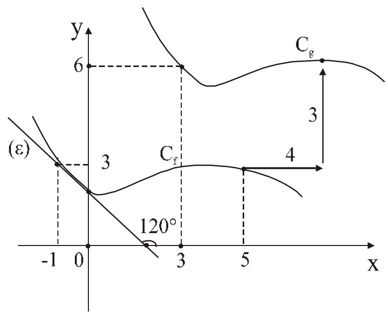
$f(2 + x) - f(2 - x) = -2x$ για κάθε $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο (2, f (2)) είναι κάθετη στην ευθεία y = x.

15. ** α) Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R. Να γράψετε τις συνθήκες ώστε η C_f και η C_g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x = x_0$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη σε ένα σημείο, του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

16. ** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο (0, f (0)). Μετακινούμε τη C_f παράλληλα προς τους άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ονομάζουμε g τη συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί στη C_g.



α) Να βρείτε μια σχέση η οποία να συνδέει τις συναρτήσεις f και g.

β) Με βάση την προηγούμενη σχέση να δείξετε ότι $g'(x_0) = f'(x_0 - 4)$ για κάθε $x_0 \in R$.

γ) Να βρείτε την $g'(4)$.

17. ** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $f(\ln x) = x \cdot \ln x - x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η $C_{f'}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 0.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και τους άξονες x΄x και y΄y.

18. ** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α (0, 1).

19. ** Να δείξετε ότι:

α) αν $f(x) = 3συνx - 2συν^2x$, τότε $f'(x) + f(x)\, εφx - ημ2x = 0$.

β) αν $f(x) = \ln \dfrac{1}{1+x}$, τότε $x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$.

20. ** Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν: $f'(4) = 0$ και $(f'(x))^2 = f(x)$ για κάθε $x \in R$,

α) να βρεθεί ο τύπος της f.

β) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x + 1$.

21. ** Μια δύναμη εφαρμόζεται σε κινητό που κινείται σε άξονα και του οποίου η απόσταση από την αρχή Ο τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = \ln(t + 1)$, $t > 0$ (όπου t ο χρόνος σε sec).

α) Να δείξετε ότι το κινητό δεν ήταν σε κατάσταση ηρεμίας όταν εφαρμόστηκε η δύναμη.

β) Να δείξετε ότι η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.

γ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας και της επιβράδυνσης του κινητού, 3 sec μετά την εφαρμογή της δύναμης.

22. ** Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει: $f(x+y) = e^x \cdot f(y) + e^y \cdot f(x) + xy + \alpha$ για κάθε $x, y \in R$.

α) Να δείξετε ότι $f(0) = -\alpha$.

β) Να δείξετε ότι η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι $f'(x_0) = f(x_0) + f'(0)\, e^{x_0} + x_0$, για κάθε $x_0 \in R$.

23. ** Μια συνάρτηση είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι:

α) η γραφική της παράσταση διέρχεται από το (0, 0).

β) $f''(0) = 0$.

24. ** Γνωρίζουμε ότι για $x \neq 1$ ισχύει: $\dfrac{x^{\nu+1} - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^\nu$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + \nu \cdot x^{\nu-1}$, $x \neq 1$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $2 + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{8} + \dfrac{5}{16} + \ldots + \dfrac{20}{2^{19}}$.

25. ** Εξηγήστε γιατί η παρακάτω διαδικασία οδηγεί σε άτοπο

$x^4 = x \cdot x^3 = \underbrace{x^3 + x^3 + x^3 + \ldots + x^3}_{x \text{ προσθετέοι}}$, άρα $(x^4)' = \left(\underbrace{x^3 + x^3 + \ldots + x^3}_{x \text{ φορές}}\right)'$, δηλαδή

$4x^3 = \underbrace{3x^2 + 3x^2 + \ldots + 3x^2}_{x \text{ φορές}}$, άρα $4x^3 = 3x^3$, επομένως $4 = 3$!!!