ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1ο ΜΕΡΟΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2.	Σ
3.	Λ
4.	Σ
5.	Σ
6.	Λ
7.	Λ
8.	Λ
9.	Λ
10.	Λ
11.	Λ
12.	Σ
13.	Σ
14.	Σ
15.	Σ

16.	Λ
17.	Σ
18.	Λ
19.	Σ
20.	Σ
21.	Λ
22.	Σ
23. α)	Σ
β)	Λ
γ)	Σ
δ)	Λ
24.	Λ
25.	Λ
26.	Λ
27.	Λ

28.	Λ
29.	Λ
30.	Σ
31. α)	Σ
β)	Σ
γ)	Σ
32.	Σ
33.	Σ
34.	Σ
35.	Λ
36.	Λ
37.	Λ
38.	Σ
39.	Σ
40.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Α
2.	Δ
3.	Β
4.	Γ
5.	Α
6.	Δ
7.	Γ
8.	Δ

9.	Γ
10.	Β
11.	Β
12.	Β
13.	Γ
14.	Γ
15.	Β
16.	Γ

17.	Β
18.	Δ
19.	Ε
20.	Γ
21.	Δ
22.	Δ
23.	Γ
24.	Β
25	Γ

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

17. Ο μαθητής συνήθως ξέρει ότι αν f και g παραγωγίσιμες, τότε και fog παραγωγίσιμη. Η ερώτηση έχει στόχο την επισήμανση ότι για να είναι η fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0, θα πρέπει η g να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο g (x_0), δηλαδή σε διαφορετικά σημεία. Έτσι σωστή απάντηση είναι η Β. Θα μπορούσε να προηγηθεί το εξής παράδειγμα:

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ x^2, & x \end{cases}$, $g(x) = 3x + 4$.

Να εξεταστεί η παραγωγισιμότητα των g, f και fog στο σημείο $x_0 = 1$.
Έχουμε g παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και f όχι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Όμως fog παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(1) = 7$.

24. Εδώ θέλουμε να δείξουμε ότι μπορεί μια συνάρτηση να έχει εφαπτομένη σ' ένα σημείο, στο οποίο αλλάζει τύπο. Η σωστή απάντηση είναι η Β, γιατί η εφαπτομένη θα πρέπει να έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(0) = 1$. Καμία άλλη ευθεία από τις δοσμένες δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης 1.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	α
2	γ
3	β
4	γ
5	β

2.

1	γ
2	ε
3	α
4	δ

3.

1	ζ
2	α
3	γ
4	η
5	β

4.

1	β
2	δ
3	α
4	ε

5.

1	β
2	γ
3	α

6.

1	γ
2	α
3	β
4	στ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $\varphi'(1) < h'(1) < \sigma'(1) < g'(1) < f'(1)$

2. $f'(1) < h'(4) < \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) < \sigma'(1) < g'(0)$

3. $\upsilon_2 < \upsilon_1 < \upsilon_4 < \upsilon_3$

4. $\lambda_h < \lambda_\varphi < \lambda_f < \lambda_g$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** Αν τα δύο όρια είναι ίσα τότε η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο x_0. Αν τα όρια είναι άνισα θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x < x_0$, και

$h(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x > x_0$.

Τότε $\lim\limits_{x \to x_0^-} [f(x) - f(x_0)] = \lim\limits_{x \to x_0^-} (x - x_0)\, g(x) = 0$

Ομοίως $\lim\limits_{x \to x_0^+} [f(x) - f(x_0)] = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

β) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$ και $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Σχόλιο: Προφανώς το ερώτημα (β) μπορεί να αντιμετωπισθεί με πολύ απλούστερο τρόπο, ο σκοπός του όμως είναι να αποτελέσει εφαρμογή της πρότασης του (α) ερωτήματος.

2. Για $x = x_0$ έχουμε $f(x_0) \leq h(x_0) \leq g(x_0)$ και αφού $f(x_0) = g(x_0)$, άρα $h(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$. Ισχύει $f(x) - f(x_0) \leq h(x) - h(x_0) \leq g(x) - g(x_0)$, οπότε για $x > x_0$ $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \leq \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ και από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι τα όρια αριστερά και δεξιά του x_0 της $\dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$ συμπίπτουν, άρα $h'(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0)$. Όμοια εργαζόμαστε για $x < x_0$.

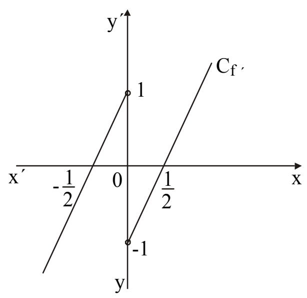
3. Η g είναι συνεχής στο 1, άρα $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, άρα: $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$, αφού f (1) = 0. Το πρώτο όριο δίνει g (1) ενώ το δεύτερο - g (1), άρα g (1) = - g (1), δηλαδή g (1) = 0

4. $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 3 \\ 5 & x \le 3 \end{cases}$

α) όχι **β)** ναι

5. **α)** $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε και από τη γραφική παράσταση η οποία στο σημείο (0, 1) παρουσιάζει γωνιακό σημείο.

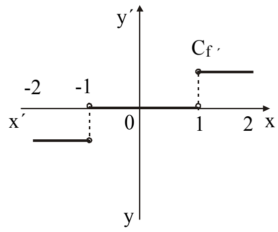
β) $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{αν } x < 0 \\ 2x-1 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$



6. **α)** $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & -2 \le x < -1 \\ 3 & -1 \le x \le 1 \\ 2x+1 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Στα $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη, ενώ στο $x_3 = \frac{3}{2}$ είναι παραγωγίσιμη.

β)



7. Αν (x_0, f (x_0)) το σημείο επαφής, τότε:

α) $f'(x_0) = 3$ **β)** $f'(x_0) = εφ\,45°$

γ) $f'(x_0) = 1$ **δ)** $f'(x_0) = 2$

ε) $f'(x_0) = 0$ **στ)** $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ (που είναι αδύνατο)

ζ) Στην ευθεία $y - (x_0^2 - x_0 + 1) = (2x_0 - 1)(x - x_0)$ ανήκει το σημείο (- 1, 0).

Σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις υπολογίζουμε το x_0 (αν υπάρχει).

8. **α)** $y = x - 1$ **β)** δεν υπάρχει **γ)** x΄x **δ)** y΄y

ε) x΄x **στ)** $y - \frac{1}{4} = -\frac{5}{16}(x + 2)$

9. Το άνω ημικύκλιο είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2}$ όπου ρ η ζητούμενη ακτίνα και $-\rho \leq x \leq \rho$.

Ισχύει $f'(-\frac{5}{2}\sqrt{2}) = εφ\,45° = 1$ με $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{\rho^2 - x^2}}$, άρα $\rho = 5$.

Άρα η εξίσωση του κύκλου θα είναι: $x^2 + y^2 = 25$.

10. Θα πρέπει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Άρα $3αx + 2βx + γ \neq 0$, δηλαδή $\Delta < 0$ $\Leftrightarrow$ $β^2 < 3αγ$.

11. **α)** Ο άξονας συμμετρίας της C_f είναι η ευθεία $x = -\frac{β}{2α} = 3$ και οι εικόνες των ριζών ρ_1, ρ_2 είναι συμμετρικές ως προς αυτή την ευθεία, αφού $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 4$.

β) Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του τριωνύμου. Τότε η $f(x) = α(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ έχει $f'(x) = α(x - \rho_1) + α(x - \rho_2)$, οπότε $f'(\rho_1) = α(\rho_1 - \rho_2)$, $f'(\rho_2) = α(\rho_2 - \rho_1)$. Οι εφαπτόμενες στα σημεία τομής με τον y΄y είναι:

$(ε_1)$ $y = α(\rho_2 - \rho_1)(x - \rho_1)$ και $(ε_2)$ $y = α(\rho_2 - \rho_1)(x - \rho_2)$ για $x = -\frac{β}{2α}$

(επειδή $-\frac{β}{2α} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$) οι δυο εξισώσεις δίνουν το ίδιο y, άρα οι $(ε_1)$, $(ε_2)$ τέμνονται πάνω στην $x = -\frac{β}{2α}$

12. **α)** $y - \frac{\ln(\alpha x_0)}{x_0} = \frac{1 - \ln(\alpha x_0)}{x_0^2}(x - x_0)$

β) Για δυο κατάλληλες τιμές του α βρίσκουμε δυο ευθείες και μετά την τομή τους.

Για $\alpha = \frac{1}{x_0}$ προκύπτει η ευθεία (ε_1): $y = \frac{1}{x_0^2}x - \frac{1}{x_0}$

Για $\alpha = \frac{e}{x_0}$ προκύπτει η (ε_2): $y = \frac{1}{x_0}$

Το σημείο τομής των (ε_1), (ε_2) είναι το $(2x_0, \frac{1}{x_0})$, το οποίο διαπιστώνουμε εύκολα ότι ανήκει στην ευθεία με εξίσωση την (α).

13. Έστω Α $(x_0, (x_0 - 1)^2)$ τυχαίο σημείο της C_f. Η εφαπτομένη (ε) στο Α έχει εξίσωση $y - (x_0 - 1)^2 = 2(x_0 - 1)(x - x_0)$ και το σύστημα αυτής της εξίσωσης με την $y = (x - 1)^2$ δίνει μοναδική λύση $x = x_0$, $y = (x_0 - 1)^2$.

14. Προκύπτει $f'(2 + x) + f'(2 - x) = -2$ για $x = 0$ $f'(2) = -1$

15. **α)** $P(x_0) = Q(x_0)$ (1) $\Leftrightarrow$ τέμνονται στο x_0, $P'(x_0) = Q'(x_0)$ $\Leftrightarrow$ κοινή εφαπτομένη

β) (3, 1)

16. **α)** $g(x) = f(x - 4) + 3$ **β)** $g'(x) = f'(x - 4)$

γ) $g'(4) = εφ120°$

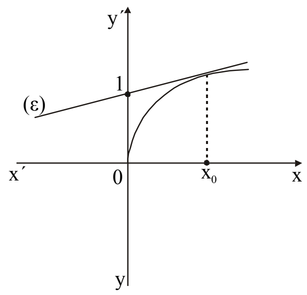
17. **α)** Για $x = 1$ $f\,'(0) = 0$

β) Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση προκύπτει: $\frac{1}{x} f\,'(\ln x) = \ln x$.

Για $x = 1$ έχουμε $f\,'(0) = 0$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = f(0)$, όμως για $x = 1$ έχουμε $f(0) = 0$, όμως για $x = 1$ στη δοσμένη προκύπτει $f(0) = -1$.

γ) Για $x = e$ $f(1) = 0$ και $f\,'(1) = e$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο (1, 0) είναι η $y = e(x - 1)$. Η (ε) τέμνει τους άξονες στα $(0, -e)$ και (1, 0), οπότε $E = \frac{1}{2}|(-e)\,1| = \frac{1}{2}e$.

18. Η (ε) έχει εξίσωση $y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$, για $x = 0$ και $y = 1$ προκύπτει $x_0 = 4$, άρα $y_0 = 2$. Όμως το σημείο (0, 1) ανήκει στην ευθεία $x = 0$ η οποία είναι εφαπτομένη της C_f, αφού $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$



20. **α)** Αν ο βαθμός της f είναι ν τότε η $f\,'$ έχει βαθμό ν - 1, άρα $2(\nu - 1) = \nu$, δηλαδή $\nu = 2$. Προφανώς $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $f\,'(4) = 0 \Leftrightarrow 8\alpha + \beta = 0$ και $(2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, άρα $4\alpha^2 = \alpha$, δηλαδή $\alpha = \frac{1}{4}$ και $\beta = -2$, ενώ $\gamma = \beta^2 = 4$.

β) Αν $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε $f\,'(x_0) = -1$ άρα $x_0 = 2$ και η εφαπτομένη είναι η (ε): $y = -x + 3$.

21. **α)** $\upsilon(t) = s\,'(t) = \frac{1}{t+1}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ η ταχύτητα $\upsilon(0) = 1$, άρα το κινητό δεν ήταν σε κατάσταση ηρεμίας.

β) $\gamma(t) = \upsilon'(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} < 0$, άρα έχουμε επιβράδυνση

γ) $|υ(3)| = \dfrac{1}{4}$ και $|γ(3)| = \dfrac{1}{16}$

22. **α)** Για $x = y = 0$ στη δοσμένη σχέση προκύπτει $f(0) = -α$

β) Για $x = 1$ και $y = 0$ προκύπτει $α(1 - e) = 0$, άρα $α = 0$

γ) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ με βάση τη δοσμένη σχέση.

Για $x = x_0$ και $y = h$ προκύπτει:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0} f(h)}{h} + \lim_{h \to 0} f(x_0) \frac{e^h - 1}{h} + x_0,$$

αλλά $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = g'(0)$ όπου $g(x) = e^x$, άρα $g'(0) = 1$,

ενώ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x_0} f(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} e^{x_0} \dfrac{[f(h) - f(0)]}{h} = e^{x_0} f'(0)$.

23. **α)** Αφού $f(-x) = -f(x)$ (1) άρα $f(0) = -f(0)$, δηλαδή $f(0) = 0$

β) Από την (1) έχουμε $-f'(-x) = -f'(x)$, άρα $f''(-x) = -f''(x)$, δηλαδή η f'' είναι και αυτή περιττή, άρα $f''(0) = 0$.

24. **α)** Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της αρχικής ισότητας προκύπτει

$$\frac{(ν+1)x^ν (x-1) - (x^{ν+1} - 1)}{(x-1)^2} = 1 + 2x + \ldots + ν \cdot x^{ν-1}$$

β) Παρατηρούμε ότι απλά εφαρμόζεται ο τύπος που προέκυψε στο (α) ερώτημα για $x = \dfrac{1}{2}$ και $ν = 20$

25. Το x^4 δεν μπορεί να γραφεί $x^3 + x^3 + \ldots + x^3$ για κάθε $x \in R$