Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, η οποία έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

α) Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f περιέχεται τουλάχιστον μια ρίζα της f'.

β) Αν η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' περιέχεται το πολύ μια ρίζα της f.

2. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x$.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο [1, 20] για τη συνάρτηση f.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 20)$ τέτοιο ώστε $\xi = \dfrac{19 \cdot \log e}{1 + \log 2}$.

3. ** Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 3x^2 + x + 1$, $x \in R$.

α) Να βρείτε μία τουλάχιστον συνάρτηση f για την οποία να ισχύει

$f'(x) = g(x) \qquad (1).$

β) Από όλες τις συναρτήσεις f οι οποίες έχουν την ιδιότητα (1) να βρείτε εκείνη της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο (- 2, - 2).

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση f με την ιδιότητα (1) της οποίας η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

4. ** α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^{\mu} (x - \beta)^{\nu}$, μ, ν θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi = \dfrac{\nu\alpha + \mu\beta}{\mu + \nu}$.

β) Να αποδείξετε ότι το παραπάνω ξ χωρίζει το διάστημα [α, β] σε λόγο $\dfrac{\mu}{\nu}$, δηλαδή ισχύει $\dfrac{\xi - \alpha}{\beta - \xi} = \dfrac{\mu}{\nu}$.

γ) Ένα πολυώνυμο P (x) είναι άρτιου βαθμού και έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς 4 και 5 ενώ κάθε ρίζα έχει τον ίδιο βαθμό πολλαπλότητας. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη στην Cp στο σημείο με τετμημένη 5 είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Σημείωση: *Αν ένα πολυώνυμο P (x) έχει ρίζα ρ με βαθμό πολλαπλότητας κ, τότε γράφεται* $P(x) = (x - \rho)^{\kappa} \cdot Q(x)$, *με* $Q(\rho) \neq 0$.

5. ** Να αποδειχθεί ότι ημ (α + h) < ημα + hσυνα, όπου $0 < \alpha < \alpha + h < \frac{\pi}{2}$.

6. ** Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και μια ευθεία (ε) με εξίσωση y = αx + β, η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία διαφορετικά σημεία. Αν x_1, x_2, x_3 οι τετμημένες των σημείων αυτών (με $x_1 < x_2 < x_3$):

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$, εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ $[x_2, x_3]$.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση: Αν μια συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και δέχεται σε δυο σημεία της γραφικής της παράστασης παράλληλες εφαπτομένες, τότε η f έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής.

7. ** Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και οι αριθμοί f (α), $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, f (β) είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\dfrac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha}$ και $\dfrac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\beta)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta}$ είναι ίσοι.

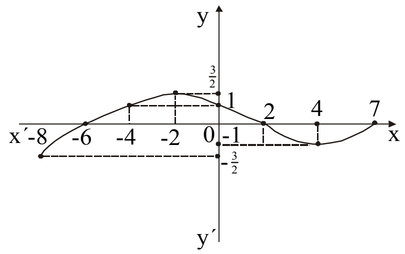
β) Να αποδείξετε ότι η δεύτερη παράγωγος της f μηδενίζεται σ’ ένα τουλάχιστον σημείο.

8. ** Με τη βοήθεια των παραγώγων να δείξετε ότι:
$ημ^6x + συν^6x + 3ημ^2xσυν^2x = 1$, για κάθε $x \in R$.

9. ** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και η f' μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, x_0)$, $(x_0, +\infty)$. Μπορούμε να αποφανθούμε ότι η f είναι σταθερή στο R; Αν τα σημεία, για τα οποία δεν γνωρίζουμε ότι έχουν παράγωγο μηδέν, είναι $x_1, x_2, \ldots, x_κ$, μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα;

Σημείωση: *Η παραπάνω άσκηση μπορεί να αποτελέσει θέμα για διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη.*

10. ** Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το [- 8, 7], της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.



α) Να μελετήσετε το πρόσημο της f (x).

β) Να λύσετε την ανίσωση f (x) > 1.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της $f'(x)$ και να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολής της f (x).

δ) Αν $g(x) = e^{f(x)}$ και $h(x) = \ln[f(x)]$, $x \in (-6, 2)$, να εξετάσετε τις g, h ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

11. ** Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $g'(x) = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right)$.

γ) Αν η $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

12. ** Ένα πολυώνυμο $P(x)$ ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = P'(x) + x^3$.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου.

β) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.

δ) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.

13. ** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(x - 2000)^{2000} = x^{2000} + 2000^{2000}$, $x \in R$, έχει μία μόνο λύση.

14. ** Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$, ώστε $P(x) \neq Q(x)$ και $P''(x) \neq Q''(x)$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x) = Q'(x)$ έχει ακριβώς μια λύση, εξετάζοντας το βαθμό του $S(x) = P(x) - Q(x)$.

15. ** Έστω ότι $x^\alpha \geq \alpha^x$ $(\alpha > 0)$ για κάθε $x > 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fermat να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

16. ** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0, 6]$. Αν η C_f περνά από το σημείο Α $(0, 1)$ και ισχύει: $f'(x) > x$ για κάθε $x \in [0, 6]$, να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 6]$.

β) $g(x) > 0$, $x \in [0, 6]$.

γ) το σημείο Β $(6, 18)$ δεν ανήκει στη C_f.

17. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x \in R$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.

β) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία $y = x$.

γ) Να βρείτε το σημείο της $y = e^x$, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την $y = x$.

δ) Ποια νομίζετε ότι είναι τα σημεία των C_f και C_g που να απέχουν την ελάχιστη απόσταση;

18. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - αx^2$, $α \neq 0$.

α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x^3$.

19. ** Σε έναν υποτασικό ασθενή με αρχική πίεση $Π_0$ χορηγούνται δύο διαφορετικά φάρμακα για την υπόταση σε διαφορετικές ημερομηνίες, των οποίων οι δράσεις καθορίζονται από τις συναρτήσεις:

$Π_1(t) = Π_0 + t\,e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και $Π_1$ η πίεση

$Π_2(t) = Π_0 + t^2 e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και $Π_2$ η πίεση

Να βρείτε:

α) Σε πόση ώρα το κάθε φάρμακο φτάνει στη μέγιστη απόδοσή του.

β) Ποιο είναι το πιο αποτελεσματικό όσον αφορά στην άνοδο της πίεσης.

20. ** Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη δυο φορές στο R, για την οποία ισχύει: $xe^x f''(x) + xe^x (f'(x))^2 = e^x - 1$, για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \neq 0$, τότε αυτό θα είναι τοπικό ελάχιστο.

β) Να αποδείξετε ότι αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$, τότε αυτό θα είναι τοπικό ελάχιστο.

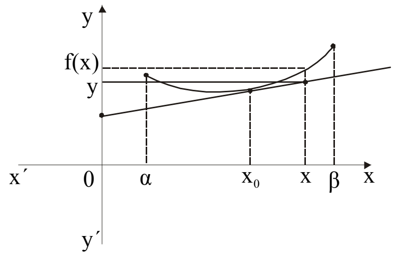
21. ** Έστω ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού $P(x) = αx^3 + βx^2 + γx + δ$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει πάντοτε ένα σημείο καμπής.

β) Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των συντελεστών του, ώστε στο σημείο καμπής να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Αν έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων στα x_1, x_2, να αποδείξετε ότι $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$.

22. ** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα [α, β]. Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται στο [α, β], πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in [α, β]$ με εξαίρεση το σημείο επαφής.



23. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ και $g(x) = 2x + f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\ln x < x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Να μελετήσετε τη g ως προς τα κοίλα - κυρτά και τα σημεία καμπής.

δ) Να εξετάσετε τη θέση της g ως προς την ευθεία $y = 2x$.

ε) Να βρείτε ένα σημείο x_0, στο οποίο η εφαπτομένη της g είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$.

24. ** α) Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2$, να δείξετε ότι η $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

25. ** Να γίνει η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ κοντά στο σημείο $x = -1$ αν ισχύουν συγχρόνως:

$f(-1) = 2, \quad f'(-1) = -1, \quad f''(-1) = 0, \quad f'''(x) > 0.$

26. ** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 5x + 1$, να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \cdot f(x) - 3x^2 + x \cdot ημx}{x^2 \cdot f(x) - 5x^3}$.

27. ** Για ποιες τιμές του κ η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + 1$ έχει σημείο καμπής για $x = 1$;

28. ** Για ποια χορδή ΒΓ παράλληλη προς την εφαπτομένη ενός κύκλου σ' ένα σημείο του Α, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μέγιστο;

29. ** Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

30. ** Ένα δοχείο γεμίζει με νερό. Ο όγκος V (t) του νερού στο δοχείο μετά t sec δίνεται από τον τύπο:

$$V(t) = \frac{2}{3}\left(20t^2 - \frac{t^3}{6}\right),\ \ 0 \le t \le 120$$

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου, όταν t = 20 sec.

β) Πότε ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος;

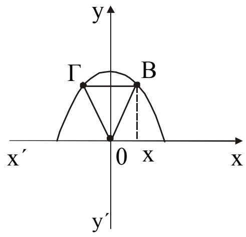
31. ** Εξηγήστε γιατί η χρήση του κανόνα του L' Hospital δεν δίνει την πραγματική τιμή του ορίου: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2 + 2}{2x - 5} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{6x}{2} = 3$ (η πραγματική τιμή είναι $-\frac{5}{3}$).

32. ** Η ενέργεια, που καταναλώνεται κατά την κίνηση σωματιδίου, δίνεται από τον τύπο $E(\upsilon) = \frac{1}{\upsilon}\left[2(\upsilon - 35)^2 + 750\right]$, $\upsilon > 0$, όπου υ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου.

α) Να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το σωματίδιο ώστε να καταναλώνει την ελάχιστη ενέργεια.

β) Πόση είναι η ελάχιστη αυτή ενέργεια;

33. ** Στο σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση $y = \frac{1}{14}(48 - x^2)$, και το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ με ΟΒ = ΟΓ.



α) Να βρείτε τα σημεία Β, Γ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ γίνεται μέγιστο.

β) Ποιο είναι αυτό το μέγιστο εμβαδόν;

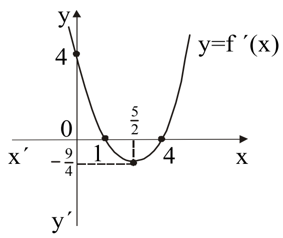
34. ** Έστω f η συνάρτηση της ποσότητας κάποιας ουσίας στο αίμα, σε σχέση με το χρόνο t. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f είναι ίσος με $\frac{1}{t - 2}$, $t > 2$:

α) Να βρείτε τον τύπο της f, αν ισχύει $f(3) = 4$.

β) Μέχρι ποια χρονική στιγμή θα ισχύει $f(t) > 1$;

35. ** Έστω $f(x) = x^2(3 - x)$, όπου η f μετρά την αντίδραση του οργανισμού σε ποσότητα x μιας ουσίας (αύξηση πίεσης, πτώση θερμοκρασίας σώματος κ.λπ.). Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η αντίδραση έχει τη μέγιστη τιμή. Ποια είναι η μέγιστη τιμή;

36. ** Η γραφική παράσταση $C_{f}΄$ της παραγώγου μιας συνάρτησης f είναι η παραβολή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



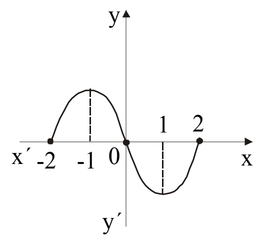
α) Να κατασκευάσετε πίνακα μονοτονίας της f.

β) Να βρείτε τον τύπο της f, αν $f(0) = 1$.

γ) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

37. ** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να λυθούν:

α) $f\,'(x) = 0$ β) $f\,'(x) < 0$ γ) $f\,'(x) > 0$



38. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = αx^2$, $α > 0$. Στο σημείο Μ της C_f με τετμημένη $x_1 > 0$ φέρνουμε εφαπτομένη (ε) που τέμνει τον x΄x στο Τ. Θεωρούμε τα σημεία Ρ, Ν πάνω στον x΄x ώστε $ΜΡ \perp x΄x$ και $ΜΝ \perp (ε)$.

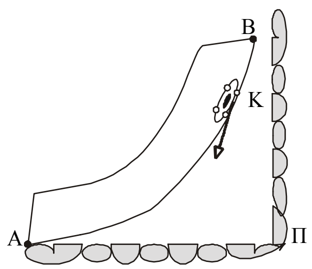
α) Να δείξετε ότι:

i) ΟΡ = 2ΤΡ ii) $ΤΡ = \dfrac{f(x_1)}{f\,'(x_1)}$

iii) $ΡΝ = f(x_1)\cdot f\,'(x_1)$ iv) $ΤΜ = \dfrac{f(x_1)}{f\,'(x_1)}\cdot\sqrt{1+\left(f\,'(x_1)\right)^2}$

β) Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ το ΤΡ είναι σταθερό. Για ποια εκθετική συνάρτηση ισχύει $ΤΡ = \dfrac{1}{2}$.

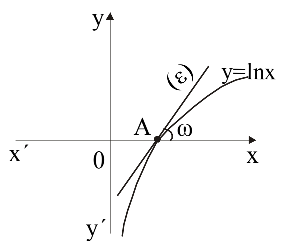
γ) Το κομμάτι ΑΒ της πίστας δοκιμών αυτοκινήτων που αναπτύσσουν μεγάλες ταχύτητες είναι τμήμα παραβολής με κορυφή στο Α. Στο σημείο Κ, που απέχει 40 μέτρα από το προστατευτικό διάζωμα ΑΠ, το αυτοκίνητο Κ εκτρέπεται λόγω της πολύ μεγάλης ολισθη-



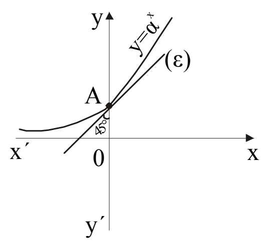
ρότητας, κινείται σχεδόν ευθύγραμμα κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης. και προσκρούει στο διάζωμα ΑΠ σε απόσταση 8 μέτρα από το Α. Ποια θα μπορούσε να είναι η εξίσωση του τμήματος ΑΒ;

Σημείωση: *Η προηγούμενη άσκηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν βάση για ανάπτυξη και άλλων ερωτημάτων όπως για παράδειγμα αν ισχύουν οι ίδιες σχέσεις και για παραβολή της μορφής* $y^2 = αx$ ($y = κ\sqrt{x}$).

39. ** Στο σχήμα (α) να υπολογίσετε τη γωνία ω και στο σχήμα (β) να υπολογίσετε τον αριθμό α. (Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η (ε) είναι εφαπτομένη της C_f).



(α)



(β)

40. ** Ένα κέντρο έρευνας για την ασφάλεια των αυτοκινήτων εξετάζει το διάστημα s που διανύει ένα αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός θα διακρίνει ένα εμπόδιο μέχρι την ακινητοποίησή του. Οι ερευνητές κατέληξαν σε μια σχέση της μορφής $3K\dfrac{ds}{dt} - e^t s^2 = 0$ όπου t ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή που ο οδηγός αντιλαμβάνεται το εμπόδιο μέχρι να πατήσει το φρένο, K μια σταθερά που εξαρτάται από το μοντέλο και παριστάνει το διάστημα που θα διανύσει το αυτοκίνητο από τη στιγμή που ο οδηγός θα πατήσει φρένο μέχρι την ακινητοποίησή του (υποτίθεται ότι στην έρευνα χρησιμοποιήθηκε για όλα τα αυτοκίνητα ταχύτητα 80 km/h).

α) Να βρείτε τη συνάρτηση s (t) χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη αρχική συνθήκη.

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης και να ερμηνεύσετε τα αποτελέσματα.

γ) Κάποιος γνωρίζει ότι ο χρόνος αντίδρασής του είναι 0,8 sec. Πόση απόσταση πρέπει να κρατά από ένα προπορευόμενο αμάξι όταν τρέχει με υ = 80 km/h;

41. ** Ο W. Estes έχει ασχοληθεί με την καμπύλη εκμάθησης ενός πειραματόζωου. Το πειραματόζωο μέσα σε έναν ελεγχόμενο χώρο έπρεπε να επιλέξει τον κατάλληλο μοχλό ώστε να πάρει το φαγητό του. Με την πάροδο του χρόνου ο αριθμός των σωστών επιλογών r (σε μια εβδομάδα) βρέθηκε ότι δίνεται από τον τύπο $r(t) = \frac{13}{1+25e^{-0,24t}}$ (t εβδομάδες εκπαίδευσης).

α) Να εξετάσετε αν το πειραματόζωο θα βελτιώνει συνεχώς τις επιδόσεις του.

β) Τι θα συμβεί αν το πείραμα συνεχιστεί για μεγάλο χρονικό διάστημα;

42. ** Ο υπολογιστής τσέπης για να υπολογίσει τις δυνάμεις του αριθμού e, δηλαδή τις τιμές του e^x, χρησιμοποιεί το άθροισμα $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ (στην ουσία χρησιμοποιεί πολύ περισσότερους προσθετέους).

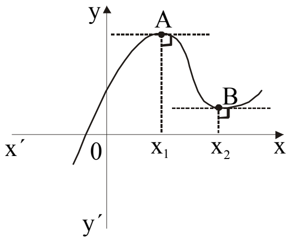
α) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ η προσέγγιση του υπολογιστή είναι μικρότερη από την πραγματική τιμή του e^x.

β) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $24e^x = 12x^2 + 4x^3 + x^4$, $x \geq 0$ έχει λύση.

γ) Να δείξετε ότι για ολοένα μεγαλύτερες τιμές του e^x, $x > 0$, έχουμε ολοένα μεγαλύτερο σφάλμα.

43. ** Μια συνάρτηση f έχει $f(0) = 1$ και $f'(0) = 2$. Να βρείτε προσεγγιστικές τιμές για τα $f(0, 1)$ και $f(-0,05)$.

44. ** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^3 + κx^2 + x + λ$, $κ, λ \in R$.



Να δείξετε ότι $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$.

45. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (x - 1000)^2$, $x \in R$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

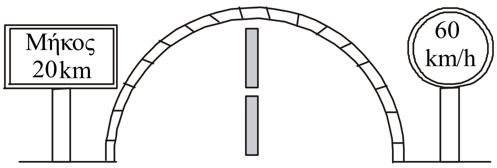
β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς 1000^2 και $998^2 + 2^2$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x) = (x - α)^ν + x^ν$, $α \in R$ και $α > 0$, $ν \in N^*$, $ν = 2ρ$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς 10000^{100} και $9000^{100} + 1000^{100}$.

46. ** Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το ανοικτό διάστημα Δ. Να δείξετε ότι αν η $h(x) = f(x) - g(x)$ έχει στο $x_0 \in Δ$ μέγιστο, τότε η f και η g έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο $x_0 \in Δ$.

47. ** Το παρακάτω σχήμα παριστάνει την είσοδο μιας σήραγγας του εθνικού οδικού δικτύου. Όταν η κίνηση είναι αυξημένη παρατηρείται «μποτιλιάρισμα» των αυτοκινήτων στη σήραγγα αυτή. Μια ομάδα συγκοινωνιολόγων μελέτησε τη ροή f των αυτοκινήτων για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και κατέληξε σε έναν τύπο ο οποίος εκφράζει τη ροή (πλήθος αυτοκινήτων / sec) σαν συνάρτηση της ταχύτητας υ των αυτοκινήτων μέσα στη σήραγγα. Ο τύπος είναι $f(\upsilon) = \dfrac{22\upsilon}{\upsilon + \dfrac{\upsilon^2}{22} + 73}$.



α) Ποιες επεμβάσεις προτείνετε στη σήμανση που υπάρχει στην είσοδο της σήραγγας;

β) Ποια είναι η μέγιστη δυνατή ροή αυτοκινήτων μέσα στη σήραγγα;

48. ** Να αποδείξετε με τη βοήθεια των παραγώγων ότι οι συναρτήσεις $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$ και $g(x) = (e^x - e^{-x})^2$, $x \in R$, διαφέρουν κατά μία σταθερά. Να βρεθεί αυτή η σταθερά.

49. ** Η κατανάλωση ενός φορτηγού που τρέχει με σταθερή ταχύτητα υ είναι $1 + \dfrac{\upsilon^2}{300}$ lt πετρέλαιο την ώρα, το πετρέλαιο κοστίζει 150 δρχ. το lt και η αμοιβή του οδηγού είναι 4.000 δρχ. την ώρα. Να βρείτε την ταχύτητα του φορτηγού για να έχουμε το ελάχιστο δυνατό κόστος μεταφοράς, καθώς και τα έξοδα της μεταφοράς για μια απόσταση 500 km.