ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 2ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 2ο ΜΕΡΟΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	**Λ**
2.	**Σ**
3.	**Λ**
4.	**Σ**
5.	**Σ**
6.	**Σ**
7.	**Σ**
8.	**Σ**
9.	**Σ**
10.	**Σ**
11.	**Σ**
12.	**Σ**
13.	**Λ**
14.	**Σ**
15.	**Λ**
16.	**Λ**
17.	**Λ**
18.	**Λ**
19.	**Σ**
20.	**Σ**
21.	**Σ**
22.	**Λ**
23.	**Σ**

24.	**Λ**
25.	**Λ**
26.	**Λ**
27.	**Λ**
28.	**Σ**
29.	**Λ**
30.	**Σ**
31.	**Σ**
32.	**Λ**
33.	**Σ**
34.	**Λ**
35. α)	**Σ**
β)	**Σ**
γ)	**Σ**
36.	**Σ**
37.	**Λ**
38.	**Λ**
39.	**Σ**
40.	**Σ**
41.	**Σ**
42.	**Σ**

43.	**Λ**
44.	**Σ**
45. α)	**Σ**
β)	**Λ**
γ)	**Σ**
46.	**Λ**
47.	**Σ**
48.	**Σ**
49.	**Σ**
50.	**Σ**
51.	**Λ**
52.	**Λ**
53.	**Σ**
54.	**Λ**
55.	**Σ**
56.	**Σ**
57.	**Λ**
58.	**Σ**
59.	**Σ**
60.	**Λ**
61.	**Σ**
62.	**Σ**
63.	**Σ**

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Β**
2.	**Δ**
3.	**Ε**
4.	**Β**
5.	**Β**
6.	**Γ**
7.	**Β**
8.	**Γ**
9.	**Γ**

10.	**Γ**
11.	**Ε**
12.	**Γ**
13.	**Β**
14.	**Ε**
15.	**Ε**
16.	**Α**
17.	**Δ**
18.	**Β**
19.	**Β**

20.	**Β**
21.	**Δ**
22.	**Δ**
23.	**Δ**
24.	**Γ**
25.	**Γ**
26.	**Β**
27.	**Δ**
28.	**Γ**

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

7. Η υπόθεση $f\,'(x) = g\,'(x)$, για κάθε $x \in R$, σημαίνει ότι οι συναρτήσεις διαφέρουν κατά μία σταθερά. Για να είναι ίσες θα πρέπει αυτή η σταθερά να είναι μηδέν. άρα θα πρέπει $f(x_0) = g(x_0)$, για κάποιο x_0. Συγκεκριμένα έχουμε δώσει $f(0) = g(0)$. Έτσι, η σωστή απάντηση είναι η Β.

12. Να προσεχθεί η έκφραση «θα μπορούσε να έχει τη μορφή». Αυτό σημαίνει ότι μόνο με τις υποθέσεις της ερώτησης δεν υπάρχει μία γραφική παράσταση. Υπάρχει όμως μία από αυτές που δίνονται. Δεν έχουμε παρά να αποκλείσουμε τις τέσσερις. Η $f\,'$ γνησίως αύξουσα σημαίνει ότι η f στρέφει τα κοίλα πάνω. Άρα σωστή απάντηση είναι η Γ.

13. Εδώ θέλουμε από τη γραφική παράσταση της $f\,'$ να υποθέσουμε τη γραφική παράσταση της f. Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η $f\,'$ είναι θετική, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο $(0, +\infty)$ η $f\,'$ είναι πάλι θετική, άρα η f είναι επίσης γνησίως αύξουσα. Στο σημείο $x_0 = 0$ είναι συνεχής, άρα και η f είναι συνεχής, συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Τέτοια είναι μόνο η Β.

22. Είναι μια δύσκολη ερώτηση. Η υπόθεση είναι ότι η (ε) είναι ασύμπτωτη της C_f (στο $+\infty$) και από το σχήμα έχουμε ότι η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ $=$ εφ45° $= 1$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$. Έτσι οι πιθανές απαντήσεις περιορίζονται στην Α και στη Δ. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x'} = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 7$, άρα σωστή είναι η Δ.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	β
2	γ, δ
3	γ, δ, ε

2.

1	ε
2	α
3	γ
4	β
5	δ

3.

1	ε
2	δ
3	γ
4	θ

4.

1	δ
2	β
3	γ
4	α

5.

1	γ
2	δ
3	β
4	στ

6.

1	β
2	δ
3	ε
4	α

7.

1	α
2	β

8.

1	γ
2	ε
3	β
4	στ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $-1 < -\frac{\sqrt{5}}{5} < 0 < \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$

2. $\xi_1 = -\sqrt{\frac{7}{3}} < \xi_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} < \xi_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} < \xi_4 = \sqrt{\frac{7}{3}}$

3. $f'(x_2) < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f'(x_1)$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. **α)** Αν ρ_1, ρ_2 δυο ρίζες της f τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$

β) Αν η f' είχε διαδοχικές ρίζες τις ρ_1' και ρ_2', ενώ η f είχε δυο ρίζες ρ_1, ρ_2 στο (ρ_1', ρ_2'), τότε, σύμφωνα με το (α), η f' θα είχε ρίζα ρ' στο διάστημα (ρ_1', ρ_2') (άτοπο, αφού διαδοχικές)

2. **α)** Η f είναι συνεχής στο [1, 20] και παραγωγίσιμη στο (1, 20)

β) Θα υπάρχει $\xi \in (1, 20)$ (από Θ.Μ.Τ.) ώστε $f'(\xi) = \frac{\log 20 - \log 1}{19}$, άρα $\frac{1}{\xi \ln 10} = \frac{\log 20}{19}$, όμως $\ln 10 = \frac{1}{\log e}$

3. **α)** $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 5$

β) Η f έχει τη μορφή $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + κ$ και αφού $f(-2) = -2$, προκύπτει $κ = 6$

γ) Θα πρέπει η εξίσωση $f'(x) = 0$ να έχει μία τουλάχιστον λύση, η f' όμως έχει $Δ < 0$

4. **α)** Εφαρμογή του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[α, β]$:
$f'(x) = (x - α)^{μ-1}(x - β)^{ν-1}[μ(x - β) + ν(x - α)]$

β) Πράξεις

γ) $P(x) = (x - 4)^κ(x - 6)^κ$, οπότε κάνουμε εφαρμογή του (α) για $μ = ν = κ$ και $α = 4$, $β = 6$

5. Η ανισότητα γράφεται $\frac{ημ(α + h) - ημα}{(α + h) - α} < συνα$ και Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = ημx$ στο $[α, α + h]$.

6. **α)** $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = α$ και $\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_2 - x_1} = α$, αφού α είναι η κλίση της ευθείας, άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $ξ_1$, $ξ_2$ ώστε $f'(ξ_1) = f'(ξ_2)$ και λόγω θεωρήματος του Rolle υπάρχει $ξ \in (x_1, x_3)$ ώστε $f''(ξ) = 0$

β) Είναι εφαρμογή του (α)

7. α) Θ.Μ.Τ. σε δύο κατάλληλα διαστήματα

β) Θεώρημα Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$ που έχει προκύψει από το (α)

Σημείωση: Μια άλλη λύση μπορεί να δοθεί από την παρατήρηση ότι τα σημεία $(\alpha,\ f(\alpha))$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, f(\frac{\alpha+\beta}{2})\right)$ και $(\beta,\ f(\beta))$ είναι συνευθειακά, οπότε η άσκηση είναι όμοια με την 6.

8. Η $f(x) = \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu^2 x$ είναι σταθερή

9. Για $x > x_0$ $f(x) = c_1$, για $x < x_0$ $f(x) = c_2$, λόγω συνέχειας

$f(x) = f(x_0) = c_1$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = c_2$, άρα $c_1 = c_2 = f(x_0)$

10. α) $f(x) < 0$ όταν $x \in [-8, -6) \cup (2, 7)$. Ενώ $f(x) \geq 0$ αν $x \in [-6, 2]$

β) $x \in (-4, -1)$

γ) $f \uparrow$ στο $[-8, -2]$, $f \downarrow$ στο $(-2, 4]$, $f \uparrow$ στο $(4, 7]$

δ) $g'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$, άρα η g έχει την ίδια μονοτονία με την f στο διάστημα $(-6, 2)$. Το ίδιο ισχύει και για την $h(x)$, αφού $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ και η $f(x) > 0$ στο $(-6, 2)$

11. γ) $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi)$ από το Θ.Μ.Τ. με $\xi \in (0, x)$.

Επειδή όμως η f' είναι $\uparrow$ στο $(0, +\infty)$, άρα $f'(x) > f'(\xi)$ για κάθε ξ στο διάστημα $(0, x)$, άρα $g'(x) > 0$.

12. α) Ο βαθμός του πρέπει να είναι πάνω από 2 και κάτω από 4, άρα είναι 3

β) Ισχύει $αx^3 + βx^2 + γx + δ = 3αx^2 + 2βx + γ + x^3$, άρα $α = 1$, $β = 3$, $γ = 6 = δ$, άρα $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$

γ) Είναι περιττού βαθμού, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα.
$P'(x) = 3x^2 + 6x + 6 > 0$, άρα $P(x) \uparrow$, άρα η ρίζα είναι μοναδική

δ) $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ και $P(0) = 6$, άρα η ρίζα είναι αρνητική. Θα μπορούσαμε να πούμε ακόμα ότι $P(κ) > 0$ για κάθε $κ \geq 0$.

13. Η προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$.
Αν θεωρήσουμε την $f(x) = (x - 2000)^{2000} - x^{2000} - 2000^{2000}$,
τότε $f'(x) = 2000\,[((x - 2000)^{1999} - x^{1999}] \neq 0$, γιατί αν υπήρχε ρίζα x_0 της f'

τότε $\left(\dfrac{x_0 - 2000}{x_0}\right)^{1999} = 1$, δηλαδή $\dfrac{x_0 - 2000}{x_0} = 1$ (άτοπο).

Άρα η f είναι γνησίως μονότονη.

14. Έστω ότι το $S(x) = P(x) - Q(x)$ είναι άρτιου βαθμού. Τότε το S' είναι περιττού, άρα έχει πραγματική ρίζα, αν όμως είχε δύο ρίζες, τότε το S'' θα είχε ρίζα (άτοπο). Αν $S(x)$ περιττού βαθμού, τότε και S'' περιττού βαθμού, άρα θα είχε ρίζα (άτοπο)

15. Αν $f(x) = x^α - α^x$ $(x > 0)$, τότε $f(x) \geq 0$, όμως $f(α) = 0$, άρα στο α η f παρουσιάζει ελάχιστο, άρα $f'(α) = 0$

16. α) $g'(x) = f'(x) - x > 0$, άρα g γνησίως αύξουσα

β) $g(0) = 1$, άρα $g(x) \geq 1$ στο $[0, 6]$, αφού $g \uparrow$

γ) $g(6) = f(6) - 18$, άρα $f(6) = g(6) + 18 \geq 19$ από (β)

17. α) $e^x \geq x + 1 > x$ και $\ln x \leq x - 1 < x$

β) $d = \dfrac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \dfrac{e^{x_0} - x_0}{\sqrt{2}}$ και $d_{min} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, αφού $e^{x_0} \geq x_0 + 1$

γ) M (0, 1)

δ) οι C_f, C_g είναι συμμετρικές ως προς την y = x

18. $f'(x) = 0 \Rightarrow x(3x - 2\alpha) = 0$, άρα τα τοπικά ακρότατα παρουσιάζονται στα σημεία με τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = \dfrac{2\alpha}{3}$ και είναι τα 0 και $-\dfrac{4}{27}\alpha^3$

19. α) $\Pi_2'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$ $\quad \Pi_1'(t) = 0 \Rightarrow t = 1$

β) το δεύτερο

20. α) Ισχύει $f'(x_0) = 0$. Αν αντικαταστήσουμε το x_0 στην αρχική σχέση, θα προκύψει $f''(x_0) = \dfrac{1}{e^{x_0}} \dfrac{e^{x_0} - 1}{x_0} > 0$ και αυτό γιατί $e^x - 1$ και x είναι ομόσημοι αριθμοί για κάθε $x \neq 0$

β) Η f'' είναι συνεχής συνάρτηση, όπως προκύπτει από τη δοσμένη σχέση, άρα $f''(0) = \lim\limits_{x \to 0} f''(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x \cdot e^x} - (f'(x))^2 \right) = 1 > 0$ ($\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, αφού $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ είναι η παράγωγος τιμή της e^x στο 0).

21. α) $P''(x) = 6\alpha x + 2\beta$ και αφού $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ρίζα $x_0 = -\dfrac{\beta}{3\alpha}$

β) $P'(-\frac{\beta}{3\alpha}) = 0$, άρα $\beta^2 = 3\alpha\gamma$

γ) Αν $\begin{matrix} P'(x_1) = 0 \\ P'(x_2) = 0 \end{matrix}$ και $\left.\begin{matrix} 3\alpha x_1^2 + 2\beta x_1 + \gamma = 0 \\ 3\alpha x_2^2 + 2\beta x_2 + \gamma = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$3\alpha (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2\beta (x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow 2(3\alpha x_1 + \beta) + 2(3\alpha x_2 + \beta) = 0$

$\Rightarrow P''(x_1) = P''(x_2)$

22. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) > y$ όπου $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, άρα αρκεί $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0)$ για $x > x_0$ και από Θ.Μ.Τ. η σχέση γίνεται $f'(\xi) > f'(x_0)$ με $\xi > x_0$, που ισχύει, αφού $f''(x) > 0$, άρα $f'\uparrow$. Όμοια για $x < x_0$.

23. α) Η $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e$. $f(x) \le f(e) \Leftrightarrow \ln x \le \frac{x}{e} < x$

β) $g'(x) = \frac{2x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$ και επειδή $2x^2 + 1 > x$ και $-\ln x > -x$,

άρα $2x^2 + 1 - \ln x > 0$

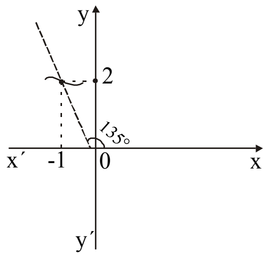
γ) Σημείο καμπής το $e^{\frac{3}{2}}$

δ) $g(x) > y \Leftrightarrow 2x + \frac{\ln x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > 0$ που ισχύει για $x > 1$, άρα για

$0 < x < 1$ $g(x) < y$, ενώ για $x = 1$ $g(x) = y$

ε) $g'(x) = 2 \Leftrightarrow x = e$

24. α) $g''(x) > 0$ **β)** $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

25. 

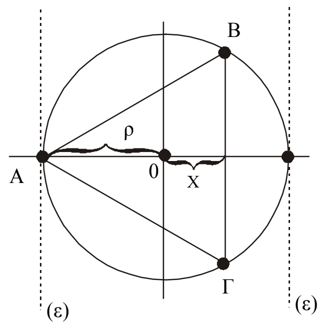
26. Διαίρεση αριθμητή και παρονομαστή με x^2. Το όριο είναι 3

27. $\kappa = -3$

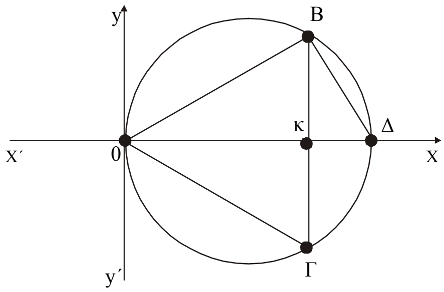
28. ***Α΄ τρόπος***

Έστω Α (- ρ, 0) το σημείο επαφής. Τότε το Β έχει συντεταγμένες $(x, \sqrt{\rho^2 - x^2})$, άρα $(ΑΒΓ) = (\rho + x)\sqrt{\rho^2 - x^2} = f(x)$ $(-\rho \leq x \leq \rho)$.

$f'(x) = \dfrac{(\rho + x)(\rho - x)}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$ και όταν $x = \dfrac{\rho}{2}$, η f παρουσιάζει μέγιστο, άρα η ΒΓ πρέπει να απέχει $3\dfrac{\rho}{2}$ από το Α.



Β΄ τρόπος



α) Αν ο κύκλος εφάπτεται στον y΄y στο Ο (0, 0), τότε αν Β (x, y), ΟΚ = x και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΔ το ΒΚ είναι ύψος, άρα $y^2 = ΒΚ^2 = ΟΚ \cdot ΚΔ = x\,(2ρ - x)$, άρα $y = \sqrt{2ρx - x^2}$, οπότε το εμβαδόν $Ε = x\sqrt{2ρx - x^2} = f\,(x)$.

Για την f (x) προκύπτει το ίδιο μέγιστο και αυτό αποτελεί ισχυρή ένδειξη ότι η θέση των αξόνων είναι ανεξάρτητη του αποτελέσματος.

β) Παρατηρούμε ότι στη θέση μεγίστου εμβαδού $ΒΓ = \sqrt{3}\,ρ$, άρα το τρίγωνο πρέπει να είναι ισόπλευρο. Το πρόβλημα της εγγραφής μέσα σε κύκλο τριγώνου με μέγιστο εμβαδό είναι ένα κλασικό γεωμετρικό πρόβλημα, του οποίου η αναλυτική αντιμετώπιση θα μπορούσε να είναι η προτεινόμενη παραπάνω.

29. Θεώρημα Rolle στο (α, β), υπάρχει $ξ \in (α, β)$ ώστε $f\,΄(ξ) = 0$ και $f\,΄΄(ξ) < 0$, δηλαδή f (ξ) μέγιστο

30. **α)** 400 **β)** t = 80

31. Στο δεύτερο βήμα δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος L' Hospital

32. **α)** υ = 40 **β)** Ε (40) = 20 μονάδες ενέργειας

33. **α)** $E = \dfrac{48x - x^3}{14}$ B $(4, \dfrac{16}{7})$ Γ $(-4, \dfrac{16}{7})$

β) $E = \dfrac{64}{7}$

34. **α)** $f(t) = \ln(t - 2) + 4$ **β)** $t > 2 + e^{-3}$

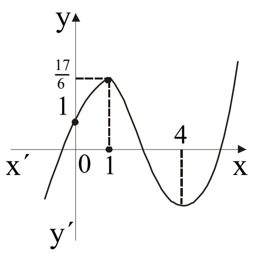
35. $x = 2 \quad f(2) = 4$

36. **α)** $(-\infty, 1] \uparrow, \ (1, 4] \downarrow (4, +\infty) \uparrow$

β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $f'(x) = x^2 - 5x + 4$, άρα

$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}x^2 + 4x + c$ και αφού $f(0) = 1$, άρα $c = 1$

γ)

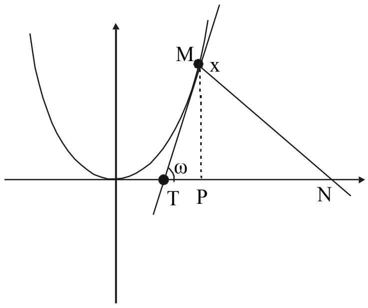


37. **α)** $x_1 = -1 \quad x_2 = 1$ **β)** $-1 < x < 1$ **γ)** $-2 < x < -1$ ή $1 < x < 2$

38. α) i) $OP = x_1$, η (ε) έχει εξίσωση:

$y - \alpha x_1^2 = 2\alpha x_1 (x - x_1)$. Για $y = 0$ προκύπτει

$x = \dfrac{x_1}{2}$ (η τετμημένη του Τ), άρα $OP = 2TP$



ii) $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{MP}{TP}$, άρα $f'(x_1) = TP \cdot f(x_1)$

iii) Στο TMN ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει $PN \cdot TP = MP^2$, άρα

$$PN = f^2(x_1) \cdot \frac{f'(x_1)}{f(x_1)}$$

iv) $\dfrac{TM}{MP} = \dfrac{MN}{PN}$, άρα $TM = \dfrac{MP \cdot MN}{PN}$ και $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2}$

β) $TP = 1$ για την e^x και αν $TP = \dfrac{1}{2}$ $\alpha = e^2$

γ) $AT = 8$ άρα το OT του (α) ερωτήματος είναι 8, δηλαδή $OP = 16$ επομένως $f(16) = 40$, δηλαδή $\alpha \cdot 16^2 = 40$, άρα η παραβολή έχει εξίσωση $y = \dfrac{40}{16^2} x^2$

39. α) $\varepsilon\varphi\omega = f'(1)$ με $f(x) = \ln x$, άρα $\varepsilon\varphi\omega = 1$ δηλαδή $\omega = 45°$

β) $\varepsilon\varphi 45° = f'(0)$ με $f(x) = \alpha^x$, άρα $1 = \alpha^{\circ} \cdot \ln\alpha$, δηλαδή $\alpha = e$

40. α) $\left(-\dfrac{1}{s(t)}\right)' = \left(\dfrac{e^t}{3\kappa}\right)'$. Άρα $s(t) = \dfrac{3\kappa}{-e^t + 4}$ αφού για $t = 0$ $s(t) = \kappa$.

Αυτό σημαίνει ότι ακόμη και αν ο οδηγός είχε μηδενικό χρόνο αντίδρασης (0 καθυστέρηση), το αυτοκίνητο θα διένυε διάστημα κ.

β) $s'(t) > 0$ άρα $s(t) \uparrow$, δηλαδή μεγαλύτερος χρόνος αντίδρασης μεγαλύτερο διάστημα ακινητοποίησης

γ) $s(0,8) = 1{,}7\kappa$

41. **α)** $r'(t) > 0$, δηλαδή $r(t) \uparrow$

β) $\lim\limits_{t \to +\infty} r(t) = 13$

42. **α)** $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{24}$, $x > 0$, τότε $f^{(3)}(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f^{(2)}(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f'(x) \uparrow$ με ελάχιστο το 0, άρα $f \uparrow$ με $f(x) > 0$

β) αδύνατη

γ) η f είναι $\uparrow$ και δίνει τη διαφορά του e^x από το άθροισμα

43. $(f(x) + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x$ για $x = 0$ και $\Delta x = 0{,}1$

$f(0,1) \approx 1{,}2$ ενώ με όμοιο τρόπο $f(-0{,}05) \approx 0{,}9$

44. Στα σημεία Α, Β οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες προς τον $x'x$ άρα τα x_1, x_2 είναι ρίζες της $f'(x) = 3x^2 + 2\kappa x + 1$, όμως $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{1}{3}$

45. **α)** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 500$, άρα για $x < 500$ $f \downarrow$, ενώ για $x > 500$ $f \uparrow$

β) $f(1000) > f(998)$ από το (α) ερώτημα. Θα μπορούσαμε ακόμη να πούμε ότι $f(0) > f(2)$ και να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα: $1000^2 > 998^2 + 2^2$

γ) Παρατηρούμε ότι εδώ έχουμε μια γενίκευση των (α), (β) και $f'(x) = \nu\,[(x-\alpha)^{\nu-1} + x^{\nu-1}]$, μια προφανής ρίζα της f' είναι η $x_0 = \frac{\alpha}{2}$ (αφού $\nu = 2\rho$) που είναι μοναδική, αφού $f''(x) > 0$, άρα $f'(x) \uparrow$.

Η μονοτονία της f είναι: $f \downarrow$ στο $(-\infty, \frac{\alpha}{2}]$ και $f \uparrow$ στο $(\frac{\alpha}{2}, +\infty)$.

Για $\alpha = 10.000$ και $\nu = 100$ προκύπτει $f(10.000) > f(9.000)$

46. $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$, άρα παράλληλες εφαπτομένες

47. **α)** $f'(\upsilon) = 0$ τότε $\upsilon \approx 40$, άρα η σήμανση πρέπει να γίνει 40 km/h

β) $f(40) \approx 5$ αυτ/sec

48. $f'(x) = g'(x)$ άρα $f(x) = g(x) + c$ για $x = 0$ $c = 4$

49. Σε t ώρες έξοδα καυσίμου $150\,(1 + \frac{\upsilon^2}{300})\,t$, αφού θα κινηθεί επί $t = \frac{500}{\upsilon}$.

Άρα θεωρούμε την $K(t) = 150\,(1 + \frac{\upsilon^2}{300})\,t + 4.000t$

Άρα $K(\upsilon) = 150\,(1 + \frac{\upsilon^2}{300})\,\frac{500}{\upsilon} + 4.000\,\frac{500}{\upsilon}$

Βρίσκουμε $\upsilon = \sqrt{8.300} \approx 91$ χιλ./ώρα και έξοδα $K(91) \approx 45.500$ δρχ.