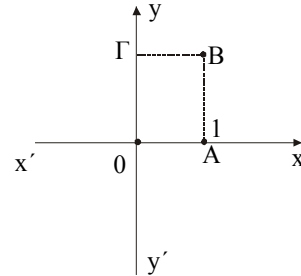


Ερωτήσεις ανάπτυξης

- **** Αν F είναι μια παράγουσα της f στο \mathbb{R} , τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $G(x) = \frac{1}{\alpha} F(ax + \beta)$ είναι μια παράγουσα της $h(x) = f(ax + \beta)$, $\alpha \neq 0$ στο \mathbb{R} .
- **** α) Να δείξετε ότι $\int_{a+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x - \gamma) dx = \int_a^{\beta} f(x) dx$.
β) Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας.
- **** Αν $P(t)$ είναι ο πληθυσμός μιας χώρας, όπου t ο χρόνος σε έτη, ένας «νόμος της αύξησης» εκφράζεται από τη σχέση $P'(t) = \kappa P(t)$ (1), όπου $\kappa > 0$ σταθερά που εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $P(t)$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο:
α) να λύσετε την εξίσωση (1).
β) Αν υποθέσουμε ότι για τον πληθυσμό της Ελλάδας ισχύει ο νόμος της αύξησης από το 1920 και μετά, που ο πληθυσμός ήταν 5.000.000 και ότι το 1990 ο πληθυσμός ήταν 10.000.000, να βρεθεί η σταθερά κ για την Ελλάδα.
γ) Αν υποθέσουμε ότι οι συνθήκες διαβίωσης δεν θα μεταβληθούν σημαντικά, να «προβλεφθεί» ο πληθυσμός της Ελλάδας το έτος 2010.
- **** Αν $y = f(t)$ είναι η μάζα τη χρονική στιγμή t μιας ραδιενεργού ουσίας, τότε σύμφωνα με το «νόμο της διάσπασης» ισχύει $y' = -\kappa y$ (1), όπου κ θετική σταθερά και t ο χρόνος σε έτη.
α) Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση (1).
β) Αν ορίσουμε ως «χρόνο υποδιπλασιασμού» το χρόνο T , στον οποίο η αρχική μάζα μειώνεται στο μισό, να αποδείξετε ότι $T = \frac{\ln 2}{\kappa}$ και ότι ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι ο ίδιος για οποιαδήποτε μάζα μιας συγκεκριμένης ραδιενεργού ουσίας.
γ) Το ραδιενεργό στοιχείο ράδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 1600 χρόνια. Να βρείτε πόση μάζα θα έχει διασπαστεί μετά από 100 χρόνια, αν η αρχική μάζα είναι 5 kgr.

5. ** Προφανώς $\int_{-2}^1 2x^2 dx > 0$. Αλλά $I = \int_{-2}^1 2x^2 dx = \int_{-2}^1 x \cdot 2x dx$ και θέτουμε $u = x^2$, οπότε $du = 2x dx$, ενώ για $x = 1$ είναι $u = 1$ και για $x = -2$ είναι $u = 4$. Άρα $I = \int_4^1 \sqrt{u} du = - \int_1^4 \sqrt{u} du < 0$. Πού βρίσκεται το λάθος;
6. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x (t^{1997} + t^{1999} + t^{2001} + t^{2003} + t) dt$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμψής.
7. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{\pi/6}^{2x} \frac{\eta \mu t}{t} dt$, με $x > 0$.
- α) Να υπολογιστεί η $f'(x)$.
- β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.
8. ** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x - 1) \int_2^x \frac{\ln t}{t} dt$, $x > 0$.
- α) Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη.
- β) Να αποδείξετε ότι μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα του Rolle για την h στο $[1, 2]$.
- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\frac{1-\xi}{\xi} \ln \xi = \int_2^\xi \frac{\ln t}{t} dt$.
9. ** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το $I_\lambda = \int_a^\beta (f(x) - \lambda)^2 dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$, γίνεται ελάχιστο όταν το λ είναι ίσο με τη μέση τιμή \bar{f} της f στο $[a, \beta]$.

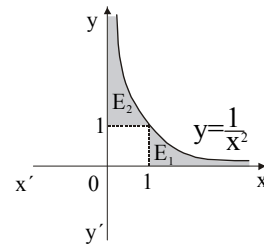
10. ** α) Να κατασκευάσετε το τμήμα μιας καμπύλης με αρχή πάνω στον άξονα $y'y$ και τέλος το B ώστε το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη και μεταξύ των ευθειών $y = 0$ και $x = 1$ να είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου OABΓ. Είναι δυνατόν η καμπύλη να παριστάνει γνησίως μονότονη συνάρτηση;



- β) Να παρατηρήσετε ότι η πρόταση: «Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και ισχύει $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$ δείξτε ότι η f διαθέτει ένα τουλάχιστον σημείο τοπικού ακροτάτου στο διάστημα $(0, 1)$ » απαντά στο ερώτημα (α) και να την αποδείξετε.

Σημείωση: Η άσκηση αποτελεί δείγμα τροποποίησης της άσκησης 3 της σελίδας 342 του σχολικού βιβλίου και το ερώτημα (α) ενδείκνυται για διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη.

11. ** α) Στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε τη σχέση που φαίνεται να έχουν τα εμβαδά E_1, E_2 .



- β) Προσπαθήστε τώρα να ελέγξετε τα συμπεράσματά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, π.χ.:

για το E_1 : θεωρήστε $\lambda > 1$ και υπολογίστε

$$\text{το } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^2} dx \text{ και}$$

$$\text{για το } E_2: 0 < \lambda < 1 \text{ και υπολογίστε το } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x^2} dx .$$

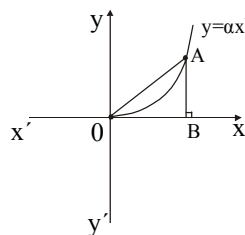
Είναι συμβατά τα όσα είχατε υποθέσει στο ερώτημα (α) με τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β); Μπορείτε να δικαιολογήσετε τα αποτελέσματά σας γεωμετρικά;

Σημείωση: Η άσκηση αποτελεί δείγμα τροποποίησης της άσκησης 9 της σελίδας 353 του σχολικού βιβλίου, αποτελεί πρόταση για διαπραγμάτευση μέσα στην

τάξη και απόδειξη ότι συχνά είναι ανάγκη η εποπτεία να ελέγχεται από μαθηματικές μεθόδους.

12. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + e^{-x}$, $g(x) = x - e^{-x}$.
- α) Να βρείτε το πρόσημο της $f(x) - g(x)$ και της $f(x) - x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$, $y = x$.

13. ** Έστω μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax^v$, $a > 0$, $x \geq 0$ και τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_1, 0)$. Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία η C_f να χωρίζει το τρίγωνο OAB σε δύο ισεμβαδικά χωρία;

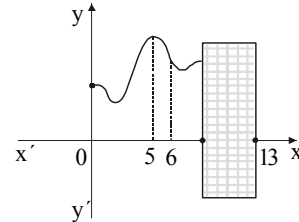


14. ** α) Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις $xy' = 1$, $x > 0$ (1) και $y' + x = 0$ (2).
- β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση κάθε λύσης της (1) και η γραφική παράσταση κάθε λύσης της (2) στο σημείο τομής τους έχουν κάθετες εφαπτόμενες (όπως λέμε τέμνονται κάθετα).
- Σημείωση:** Η απόδειξη ότι κάθε λύση της (1) έχει ένα κοινό σημείο με οποιαδήποτε λύση της (2) μπορεί να αποτελέσει ένα ενδιαφέρον θέμα διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη.

15. ** Δίνεται η $f(x) = \int_0^x (t^2 + 1) dt$.

- α) Να βρείτε το $f'(0)$.
- β) Να βρείτε το $f(1)$.
- γ) Να υπολογίσετε το $f''(1)$.

16. ** Ένα μέρος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει καλυφθεί από μια αδιαφανή ετικέτα. Η f είναι ορισμένη στο $[0, 13]$ και έχει παράγωγο οποιασδήποτε τάξεως. Να εκτιμήσετε τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων:



α) $\int_5^{12} f'(x) dx$ β) $\int_0^{13} f(x) dx$ γ) $\int_5^6 f''(x) dx$

Σημείωση: Η παραπάνω άσκηση αποτελεί θέμα για διαπραγμάτευση μέσα στην τάξη. Τα ερωτήματα θα μπορούσαν να αναφέρονται και σε άλλα σημεία του διαστήματος $[0, 13]$ καθώς και σε ορισμένο ολοκλήρωμα της f''' .

17. ** α) Η συνεχής συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[a, \beta]$ και είναι γνησίως αύξουσα. Να δικαιολογήσετε γεωμετρικά τη σχέση:

$$(\beta - a) f(a) \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq (\beta - a) \frac{f(a) + f(\beta)}{2}$$

- β) Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[a, \beta]$ και είναι γνησίως αύξουσα ποια θα είναι η αντίστοιχη σχέση;

γ) Αν $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$, να δείξετε ότι το I ανήκει στο διάστημα $(1, 1,21)$.

18. ** Η εφαπτομένη του διαγράμματος μιας συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x = a$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με τετμημένη $x = \beta$ γωνία $\frac{\pi}{4}$. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f''(x) dx$.

19. ** Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 12 ωρών η θερμοκρασία T σε βαθμούς C τη χρονική στιγμή t (μετρημένη σε ώρες από την αρχή της περιόδου) είναι $T(t) = 25 + 0,3t - 0,05t^3$.

α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η θερμοκρασία γίνεται μέγιστη.

β) Ποια είναι η μέγιστη θερμοκρασία;

γ) Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία κατά τη διάρκεια της περιόδου.

20. ** Αν η συνάρτηση f , που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, στρέφει τα κοίλα άνω και είναι γνησίως αύξουσα, να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης:

$$\int_a^\beta f''(x) dx + \int_a^\beta f'(x) dx$$

21. ** Θεωρείται γνωστό ότι ο ρυθμός με τον οποίο διαδίδεται μια είδηση σε μια πόλη με συνολικό πληθυσμό A είναι ανάλογος του αριθμού των κατοίκων που δεν γνωρίζουν την είδηση. Να εκφράσετε τον αριθμό των κατοίκων που έχουν πληροφορηθεί την είδηση ως συνάρτηση του χρόνου t .

22. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι προφανώς

ορισμένη σε όλο το R και παίρνει θετικές τιμές ή μηδέν. Υπολογίζουμε το

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2 < 0. \text{ Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού } f(x) \geq 0.$$

Πού βρίσκεται το λάθος;

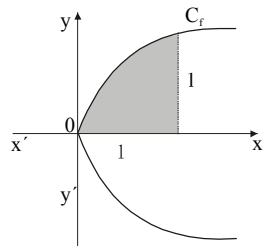
23. ** Θέλουμε να υπολογίσουμε το $I = \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 + \sin 2x}{2}} dx$. Γράφουμε:

$$I = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2\sin^2 x}{2}} = \int_0^\pi \sin x dx = 0. \text{ Όμως η συνάρτηση } f(x) = \sqrt{\frac{1 + \sin 2x}{2}}$$

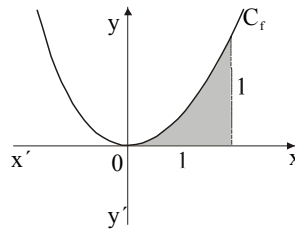
είναι μη αρνητική στο διάστημα $[0, \pi]$, άρα δεν μπορεί να μηδενιστεί το I .

Πού βρίσκεται το λάθος;

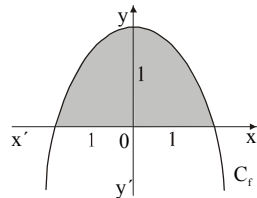
24. ** Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η καμπύλη C_f είναι παραβολή. Να υπολογίσετε τα σκιασμένα εμβαδά.



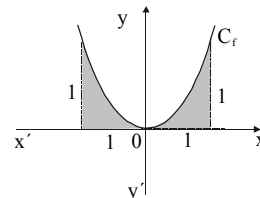
A



B



Gamma



Delta

25. ** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\int_0^\pi \eta\mu 2x \, dx = 0$

β) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} \, dx = \frac{9\pi}{2}$

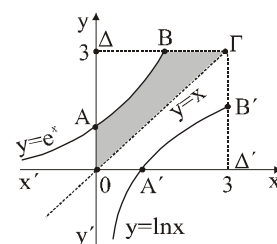
γ) $\int_1^2 (2x+1) \, dx = 4$

δ) $\int_{1/2}^5 \ln x \, dx < \int_1^5 \ln x \, dx$

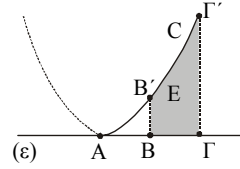
26. ** α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $A'B'\Delta'$.

- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

Σημείωση: Η άσκηση αποτελεί δείγμα τροποποίησης της άσκησης 6 στη σελίδα 350 του σχολικού βιβλίου Θετικής Κατεύθυνσης.



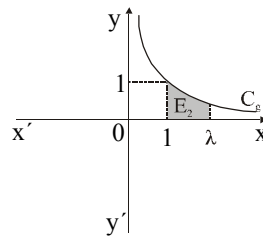
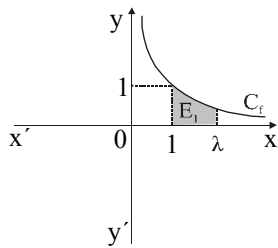
27. ** α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$ είναι ίση με $\frac{1}{3}(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$.



- β) Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιος ώστε $\xi^2 = \frac{1}{3}(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$.

28. ** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ και

$$g(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0.$$



- α) Να βρείτε τα εμβαδά E_1 και E_2 .

- β) Να βρείτε τα όρια: $I_1 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda f(x) dx$ και $I_2 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda g(x) dx$.

29. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

- α) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

- β) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 2$.

- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

- δ) Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα x' που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

30. ** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν $f(x) = x^2 f'(x)$ και $f(1) = \frac{2004}{e}$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 2004 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

31. ** Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^x$.

α) Να βρείτε μια άρτια συνάρτηση f και μια περιττή συνάρτηση g στο \mathbb{R} , τέτοιες ώστε $f(x) + g(x) = h(x)$.

β) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα των f, g .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \lambda > 1$.

δ) Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

