ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 3ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1.	Σ
2.	Λ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Σ
7.	Σ
8.	Σ
9.	Σ
10.	Σ
11.	Λ
12.	Σ
13.	Λ
14.	Λ
15.	Σ
16.	Σ
17.	Σ
18.	Λ
19.	Σ
20.	Σ
21.	Σ

22.	Σ
23.	Λ
24.	Σ
25.	Σ
26.	Σ
27.	Σ
28.	Σ
29.	Σ
30.	Λ
31.	Σ
32.	Σ
33.	Σ
34. α)	Σ
β)	Σ
γ)	Σ
35.	Σ
36.	Λ
37.	Λ
38.	Λ
39.	Σ
40.	Σ

41.	Λ
42.	Λ
43.	Σ
44.	Σ
45.	Λ
46.	Σ
47.	Σ
48.	Λ
49.	Λ
50.	Σ
51.	Σ
52.	Λ
53.	Σ
54.	Σ
55.	Σ
56.	Σ
57.	Σ
58.	Σ
59.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	**Δ**
2.	**Β**
3.	**Β**
4.	**Δ**
5.	**Ε**
6.	**Δ**
7.	**Γ**
8.	**Γ**
9.	**Β**
10.	**Δ**
11.	**Β**
12.	**Γ**

13.	**Δ**
14.	**Ε**
15.	**Δ**
16.	**Β**
17.	**Δ**
18.	**Δ**
19.	**Ε**
20.	**Β**
21.	**Β**
22.	**Ε**
23.	**Γ**
24.	**Ε**

25.	**Δ**
26.	**Ε**
27.	**Γ**
28.	**Β**
29.	**Γ**
30.	**Β**
31.	**Δ**
32.	**Β**
33.	**Γ**
34.	**Ε**
35.	**Δ**

Μερικές ενδεικτικές λύσεις

11. Ένας τρόπος να απαντήσουμε είναι να «δούμε» τη λύση κάθε διαφορικής (όλες είναι εύκολες) και να διαπιστώσουμε ποια ταιριάζει στο σχήμα. Λύση εκθετικής μορφής έχει μόνο η Β. Ένας άλλος τρόπος είναι να διαπιστώσουμε από το σχήμα ότι η λύση είναι εκθετικής μορφής και μετά να εξετάσουμε ποια διαφορική θα μπορούσε να έχει τέτοια λύση.

21. Η ερώτηση είναι για τον έλεγχο της γνώσης του ορισμού της μέσης τιμής συνάρτησης. Είναι $\bar{f} = \dfrac{\int_\beta^\alpha f(x)\,dx}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow (\beta - \alpha)\,\bar{f} = \int_\beta^\alpha f(x)\,dx$. Προφανώς $\beta - \alpha = AB$, άρα απαντάμε Β.

25. Εδώ θέλουμε να τονίσουμε ότι το πρόσημο ενός ορισμένου ολοκληρώματος εξαρτάται βέβαια από τη συνάρτηση, αλλά και από τα άκρα. Εδώ έχουμε μεν $e^{x^2} > 0$, αλλά $\int_{\beta}^{\alpha} e^{x^2} dx = (\beta - \alpha)\, f(\xi)$, $\xi \in (\alpha, \beta)$, άρα είναι θετικό, μόνο αν και $\beta - \alpha > 0$, δηλαδή $\beta > 0$. Έτσι απαντάμε Δ.

30. Έξυπνη ερώτηση. Το εμβαδόν ισούται με $\int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - f(x))\, dx$. Όμως $g(x) - f(x) = 1$, άρα $\int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx = \beta - \alpha$. Σωστή απάντηση είναι η Β.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	δ
2	γ
3	α

2.

1	δ
2	η
3	ε
4	α
5	γ

3.

1	γ
2	ζ
3	α
4	ε

4.

1	γ
2	δ
3	α
4	ζ

5.

1	β
2	γ
3	α

6.

1	ε
2	γ
3	ζ
4	ι
5	β
6	θ

7.

1	ε
2	θ
3	δ
4	α
5	β
6	η

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $E_4 < E_2 < E_1 < E_3$

2. $\overline{\varphi} < \overline{h} < \overline{g} < \overline{f}$

3. $f(3) < f(2) < f(1)$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. $G'(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot [F(\alpha x + \beta)]' = F'(\alpha x + \beta) = f(\alpha x + \beta)$

2. **α)** Θέτουμε $x - \gamma = u$

β) Το εμβαδόν παραμένει σταθερό αν η γραφική παράσταση μεταφερθεί κατά διάνυσμα $\vec{\gamma} \,//\, x'x$

3. **α)** $\frac{P'(t)}{P(t)} = \kappa \Leftrightarrow \ln P(t) = \kappa t + c' \Leftrightarrow P(t) = e^{\kappa t + c} \Leftrightarrow P(t) = ce^{\kappa t}$ με $c = P(0)$

β) $P(1990) = f(1920)\, e^{\kappa \cdot 70} \quad \kappa = \frac{\ln 2}{70}$

γ) $P(2010) \approx 12.000.000$

4. **α)** $y = f(0) \cdot e^{-\kappa t}$

β) $f(t) = \frac{f(0)}{2}$ άρα $T = \frac{\ln 2}{\kappa}$

γ) 0,21 kgr

5. Στο [- 2, 1] η $g(x) = x^2$ δεν είναι 1-1

6. $f''(x) = t^{1996} + t^{1998} + t^{2000} + t^{2002} > 0$

7. **α)** $f'(x) = \dfrac{ημ2x}{x}$. Αν $g(x) = \dfrac{ημ2x}{x} - 1$, τότε g συνεχής στο $[\dfrac{π}{4}, \dfrac{π}{3}]$ και

$g(\dfrac{π}{4}) = \dfrac{4}{π} - 1 > 0$ και $g(\dfrac{π}{3}) = \dfrac{3}{2π} - 1 < 0$, άρα υπάρχει $x_0 \in (\dfrac{π}{4}, \dfrac{π}{3})$

ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή $f'(x_0) = 1$

β) Θεώρημα Bolzano για την $g(x) = f'(x) - 1$ στο $[\dfrac{π}{4}, \dfrac{π}{3}]$

8. **α)** Η h είναι γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

β) $h(1) = h(2) = 0$

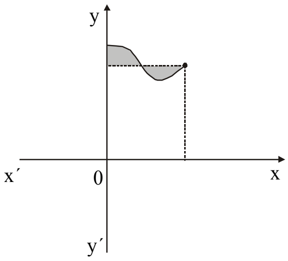
γ) Η εφαρμογή του θεωρήματος Rolle για την h (x) εξασφαλίζει έναν αριθμό

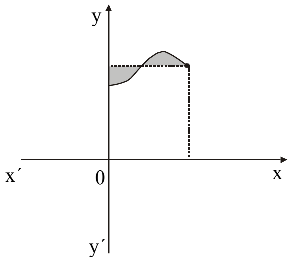
$ξ \in (1, 2)$ ώστε $h'(ξ) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-ξ}{ξ}\ln ξ = \displaystyle\int_2^{ξ} \dfrac{\ln t}{t}\,dx$

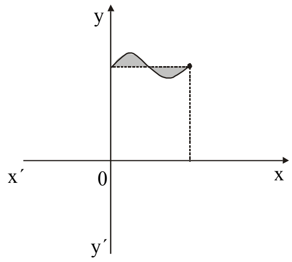
9. $I_λ = (β - α)λ^2 - \left(\displaystyle\int_α^β 2f(x)\,dx\right)λ + \displaystyle\int_α^β f(x)\,dx$ που είναι τριώνυμο ως προς λ

και γίνεται ελάχιστο όταν $λ = -\dfrac{β}{2α} = \dfrac{2\int_α^β α f(x)\,dx}{2(β - α)} = \bar{f}$

10. α) Μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις καμπυλών που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του ερωτήματος και γίνεται αντιληπτό ότι δεν μπορεί η καμπύλη να παριστάνει μια γνησίως μονότονη συνάρτηση, άρα θα παρουσιάζει ένα τουλάχιστον σημείο τοπικού ακροτάτου (εφόσον προέρχεται από παραγωγίσιμη συνάρτηση.







β) Ας υποθέσουμε ότι f (x) > 0 στο [0, 1]. Αν επιχειρήσουμε να «μεταφράσουμε» τα σύμβολα μέσα στο πλαίσιο που καθορίζει το σχήμα της (α), τότε $\int_0^1 f(x)\,dx$ είναι «το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη και μεταξύ των ευθειών y = 0 και x = 1».

$f(1) = f(1) \cdot 1 = f(1) \cdot OA = AB \cdot OA$ είναι «το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ», άρα η ισότητα $\int_0^1 f(x)\,dx = f(1)$ έχει την ίδια σημασία που προκύπτει από τα σχήματα του ερωτήματος (α). Η τυπική απόδειξη θα μπορούσε να έχει ως εξής: Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε θα είναι και 1-1. Από γνωστή πρόταση υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $\int_0^1 f(x)\,dx = f(\xi)(1 - 0)$, δηλαδή $f(\xi) = f(1)$, άρα $\xi = 1$ (άτοπο).

11. **α)** Εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι $E_1 = E_2$

β) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_1^{\lambda}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}(1 - \frac{1}{\lambda}) = 1$ αυτό είναι το E_1

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\int_1^{\lambda}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0^+}(1 - \frac{1}{\lambda}) = +\infty$ αυτό εκφράζει το μέγεθος του E_2

Μια πρόταση για γεωμετρική ερμηνεία είναι η παρακάτω:

Αν το χωρίο E_1 διαιρεθεί σε ορθογώνια με πολύ μικρή βάση, τότε τα ύψη των ορθογωνίων μικραίνουν με τέτοιο ρυθμό, ώστε αν και το πλήθος είναι θεωρητικά άπειρο, το άθροισμα των εμβαδών τους να είναι πραγματικός αριθμός, πράγμα που δεν συμβαίνει στο E_2.

12. **α)** $f(x) - g(x) = 2e^{-x} > 0$ και $f(x) - x = e^{-x} > 0$

β) $E = \int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = 2(1 - e^{-2})$

γ) $E = \int_0^2 (f(x) - x)\,dx = 1 - e^{-2}$

13. Το ΟΑΒ έχει εμβαδόν $\frac{1}{2}$ ΟΒ·ΑΒ $= \frac{1}{2} x_1 \cdot \alpha x_1^{\nu}$, άρα θα πρέπει

$\int_0^{x_1} \alpha x^{\nu}\,dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} x_1 \cdot \alpha x_1^{\nu})$, άρα $\nu = 3$ και $f(x) = \alpha x^3$

14. α) $y' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \ln x + c_1$ και $y' = -x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + c_1$, $y = \ln x + c_2$

β) Αν (x_1, y_1) είναι σημείο τομής δυο καμπυλών, εκ των οποίων η μία να είναι λύση της πρώτης και η άλλη λύση της δεύτερης εξίσωσης, τότε οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 των εφαπτομένων σε κάθε καμπύλη είναι αντίστοιχα $\frac{1}{x_1}$ και $-x_1$, οπότε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Για να εξασφαλίσουμε ότι δυο οποιεσδήποτε καμπύλες, μία από κάθε εξίσωση, τέμνονται, θα πρέπει να δειχθεί ότι η εξίσωση $\ln x + c_1 = -\frac{1}{2}x^2 + c_2$ έχει για οποιαδήποτε c_1, c_2 λύση ή ότι υπάρχει $x > 0$ ώστε $\ln x + \frac{1}{2}x^2 = c_2 - c_1$ για κάθε c_1, c_2. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2$ έχει σύνολο τιμών το R, άρα για κάθε $c_2 - c_1$ υπάρχει $x > 0$ ώστε $f(x) = c_2 - c_1$.

15. α) $f'(x) = x^2 + 1$, άρα $f'(0) = 1$

β) $f(1) = \int_0^1 x^2 + 1\,dx = \frac{4}{3}$

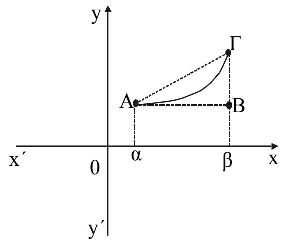
γ) $f''(x) = 2x$ άρα $f''(1) = 2$

16. α) $\int_5^{12} f'(x)\,dx = f(12) - f(5) < 0$, αφού $f(5)$ η μέγιστη τιμή

β) $\int_0^{13} f(x)\,dx > 0$, αφού το εμβαδόν της ετικέτας κάτω από τον x΄x είναι αρκετά μικρότερο από αυτό που φαίνεται να βρίσκεται πάνω από τον x΄x

γ) $\int_5^{6} f''(x)\,dx = f'(6) - f'(5)$ όμως $f'(5) = 0$ και $f'(6) < 0$, αφού στο σημείο αυτό η καμπύλη «κατέρχεται».

17. α) $(\beta - \alpha)\, f(\alpha)$ = εμβαδόν ορθογωνίου, $(\beta - \alpha)$ $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ = εμβαδόν τραπεζίου



β) $(\beta - \alpha)\left(\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq (\beta - \alpha)\, f(\beta)$

γ) $f \uparrow$ και $f''(x) > 0$ άρα $1 < I < \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$

18. $\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\,dx = f'(\beta) - f'(\alpha) = \text{εφ}\,\dfrac{\pi}{4} - \text{εφ}\,\dfrac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3}$

19. α) $T'(t) = 0$, άρα $t_0 = \sqrt{2}$

β) $T(\sqrt{2})$

γ) Για διακριτά ποσά η μέση τιμή έχει τη μορφή $\dfrac{1}{\nu}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)$. Για συνεχείς μεταβολές (όπως είναι η μεταβολή του χρόνου) η αντίστοιχη σχέση θα είναι: $\dfrac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$, άρα στην περίπτωση του προβλήματος

$$\overline{T} = \frac{1}{12}\int_{0}^{12} T(t)\,dt$$

20. $f''(x) > 0$, άρα $f'(x) \uparrow$, οπότε $f'(\beta) - f'(\alpha) > 0$ και $f'(x) > 0$, άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha) > 0$. (Στα ίδια συμπεράσματα θα μπορούσαμε να φτάσουμε αν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα: $f(x) > 0$ στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$)

21. Αν Α ο συνολικός πληθυσμός f η ζητούμενη συνάρτηση τότε

$$\frac{df}{dt} = K(A - f(t)) \text{ και } f(t) = A + ce^{-\kappa t}$$

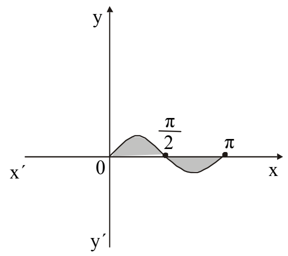
22. Η f δεν είναι συνεχής στο 0.

23. $\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x} = |\sigma\upsilon\nu x|$ στο $[0, \pi]$

24. **Α.** $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}$ **Β.** $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$

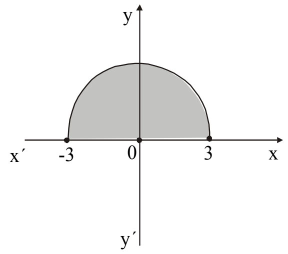
Γ. $\int_{-1}^{1} (-x^2+1)\, dx$ **Δ.** $\int_{-1}^{1} x^2\, dx$

25. **α)**



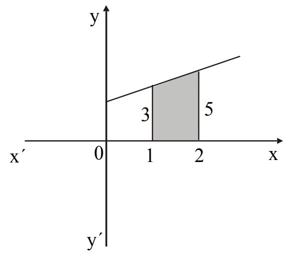
$\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx = -\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\, dx$

β)



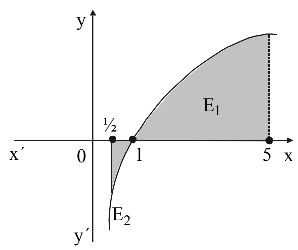
είναι εμβαδόν ημικυκλίου

γ)



εμβαδόν τραπεζίου

δ)



$E_1 > E_2$

26. **α)** $(Α΄Β΄Δ΄) = 3\ln 3 - 2$

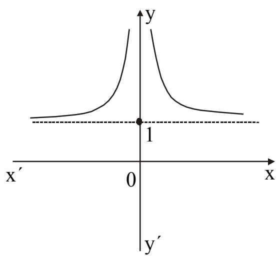
β) $(ΟΔΓ) = \frac{9}{2}$, $(ΑΟΓΒ) = \frac{9}{2} - (3\ln 3 - 2)$ λόγω συμμετρίας

27. **α)** $\frac{1}{\lambda - \kappa} \int_{\kappa}^{\lambda} x^2\, dx = \frac{1}{3}\, \frac{\lambda^3 - \kappa^3}{\lambda - \kappa} = \frac{1}{3}\, (\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$

β) Υπάρχει $\xi \in (\kappa, \lambda)$ ώστε $\frac{1}{\lambda - \kappa} \int_{\kappa}^{\lambda} x^2\, dx = f(\xi) = \xi^2$

28. **α)** $E_1 = \ln\lambda$, $E_2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ **β)** $I_1 = +\infty$ $I_2 = 1$

29. **α)**



β) Στο $[1, 2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $f(2) \le \int_1^2 f(x)\, dx \le f(1)$

γ) $\frac{9}{4}$ **δ)** $\int_2^{\alpha} f(x)\, dx = \frac{9}{8}$

30. **α)** $[\ln f(x)]' = \left(-\frac{1}{x}\right)'$ … **β)** $2004\, (\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e})$

31. **α)** $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

γ) $E(\lambda) = 1 - \frac{1}{e^{\lambda}}$ **δ)** 1