

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } 3^{2x} = \frac{1}{81} \quad \text{ii) } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \quad \text{iii) } 2^{-x} = 32$$

$$\text{iv) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 27 \quad \text{v) } \frac{1}{2^x} = 16$$

2. * Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } 2^{x^2-5x+6} = 1 \quad \text{ii) } \left[3^{(x^2-9)}\right]^{(x-2)} = 1 \quad \text{iii) } 4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{\frac{x}{2}}$$

$$\text{iv) } 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \quad \text{v) } 3^{2x-2} + 3^x = 4 \quad \text{vi) } 5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$$

3. * Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } 2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0 \quad \text{ii) } 5 \cdot 2^x = 2^{x+3} - 3\sqrt{2} \quad \text{iii) } 3^{x+1} - 28 + 9 \cdot 3^{-x} = 0$$

$$\text{iv) } 2^{x-2} - 3^{x-3} - 2^{x-3} + 3^{x-4} = 0 \quad \text{v) } 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

4. ** Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } (x^2 - 5x + 5)^{x+2} = 1 \quad \text{ii) } e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$$

5. ** Να λύσετε τις εξισώσεις

$$\text{i) } 3^{\eta\mu 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ii) } 3^{\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x} = 9^{1-2\eta\mu^2 \frac{x}{2}}$$

$$\text{iii)} 2^{\eta\mu x} \cdot (4^{\eta\mu x})^{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt[5]{32^{\eta\mu 3x}}$$

6. ** Να λύσετε τις ανισώσεις

$$\text{i)} 3^{x^2-7x+6} < 1 \qquad \text{ii)} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$$

$$\text{iii)} (0,5)^{5x-x^2-1} < 0,125 \qquad \text{iv)} 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$$

7. ** Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i)} \begin{cases} 9^{x+1} = 3^{y+3} \\ 4^{x+y} = 8 \cdot 2^x \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \begin{cases} 2^{x-1} \cdot 4^y = 1 \\ 3^x \cdot 3^{y-1} = 9 \end{cases} \qquad \text{iv)} \begin{cases} 3^x - 5^y = 4 \\ 9 \cdot 3^{-x} + 5^y = 6 \end{cases}$$

8. ** i) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad \text{και} \quad g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

ii) Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y'y.

9. ** Αν f και g δύο συναρτήσεις με $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ και $g(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$

να αποδείξετε ότι: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$.

10. ** i) Να βρείτε το ($a \neq 5$) ώστε η $f(x) = \left(\frac{1-a}{a-5}\right)^x$ να είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το a , ($a \neq 0$) ώστε η $g(x) = \left(1 - \frac{5}{a}\right)^x$ να είναι γνησίως φθίνουσα.

11. ** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = (1 - k^2)^x$.

- α) Για ποιες τιμές του k ορίζεται η f ;
- β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του k για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.
- γ) Να βρείτε το k ώστε η γραφική παράσταση της $f(x)$ να περνάει από το σημείο $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
- δ) Να βρείτε τις τιμές του k ώστε η γραφική παράσταση της $f(x)$ να περνάει από το σημείο $\Sigma(2, 1)$.

12. ** Σ' ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία (πυρετός) $\Theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο $\Theta(t) = 36 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^t$ σε βαθμούς Κελσίου.

- α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.
- β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την φυσιολογική τιμή των $36,5^\circ\text{C}$.
- γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου.

13. *** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = ka^x$, $0 < a \neq 1$ και $k \in \mathbb{R}$

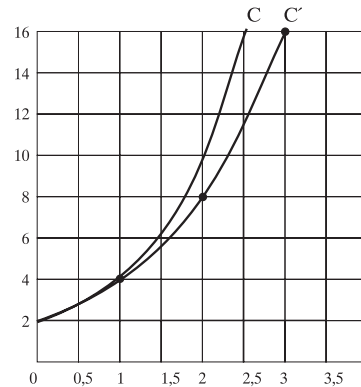
i) Να βρείτε τους λόγους:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}, \frac{f(x+2)}{f(x+1)}, \frac{f(x+7)}{f(x+6)}$$

ii) Να βρείτε τους λόγους:

$$\frac{f(x+3)}{f(x)}, \frac{f(x+6)}{f(x+3)}, \frac{f(x+16)}{f(x+13)}$$

iii) Να αποδείξετε ότι ο λόγος των τιμών της $f(x)$ που αντιστοιχούν σε ζεύγη τιμών της μεταβλητής x που ισαπέχουν είναι σταθερές. (Ζεύγη τιμών που ισαπέχουν είναι $(x, x+3)$, $(x+3, x+6)$, $(x+12, x+15)$ κλπ.



Σχ.17

iv) Στο σχήμα 17 δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας εκθετικής συνάρτησης και μιας παραβολής.

Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (iii), να βρείτε ποια είναι η γραφική παράσταση της εκθετικής.

Παρατήρηση: Το ερώτημα (iii) εφαρμόζεται ως *κριτήριο αναγνώρισης* μίας καμπύλης αν είναι γραφική παράσταση εκθετική και ως *κριτήριο αναγνώρισης* αν ένας πίνακας τιμών x, y ορίζει μία εκθετική συνάρτηση.

14. ** Ένα δείγμα 5 Kgr ενός ραδιενεργού ισότοπου διασπάται σύμφωνα με τον τύπο: $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-kt}$ όπου $Q(t)$ παριστάνει την ποσότητα που απομένει μετά από χρόνο t , $Q_0 = Q(0)$ η αρχική ποσότητα (για $t = 0$) και k σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

Αν το μισό του αρχικού δείγματος διασπάστηκε σε 10 min., να βρείτε πόση ποσότητα ραδιενεργού υλικού θα έχει απομείνει μετά από 40 min.

15. ** Ένας βιολόγος μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρεί ότι:

i) 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400.

ii) 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 3.200.

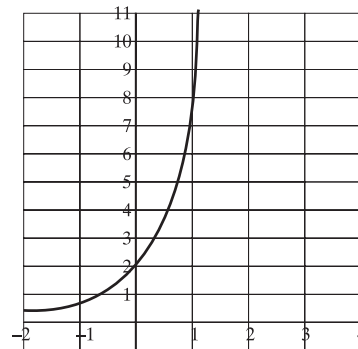
Αν ο τύπος που δίνει τον αριθμό των βακτηριδίων είναι $P(t) = P_0 \cdot 2^{kt}$, όπου $P(t)$ ο αριθμός των βακτηριδίων σε χρόνο t , P_0 ο αρχικός αριθμός και k σταθερά που εξαρτάται από το είδος των βακτηριδίων τότε:

α) Να βρείτε τη σταθερά k .

β) Να βρείτε τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων.

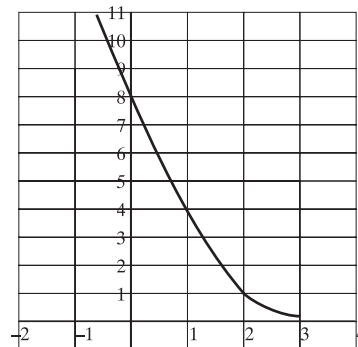
γ) Σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων είχε διπλασιαστεί;

16. ** α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = k \cdot 4^x$ είναι η καμπύλη του σχήματος 18 να βρείτε το k .



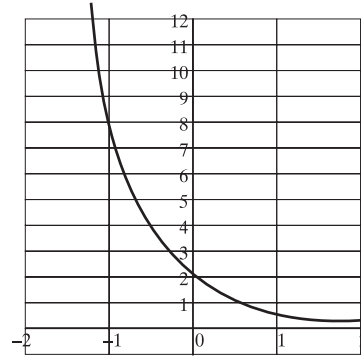
Σχ.18

β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 8 \cdot a^x$ είναι η καμπύλη του σχήματος 19 να βρείτε το a .



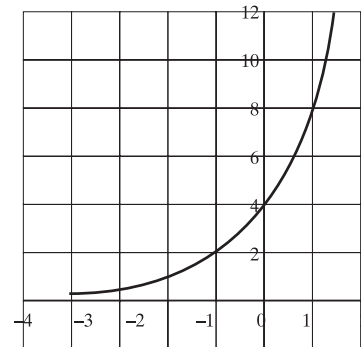
Σχ. 19

- γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 2 \cdot a^{-x}$ είναι η καμπύλη του σχήματος 20 να βρείτε το a .



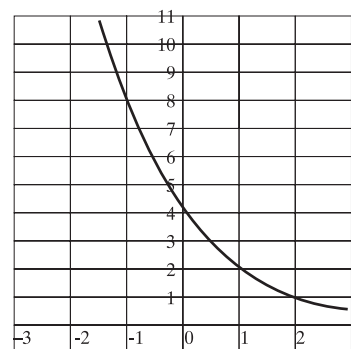
Σχ. 20

- δ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = k \cdot a^x$ είναι η καμπύλη του σχήματος 21 να βρείτε τα k, a .



Σχ. 21

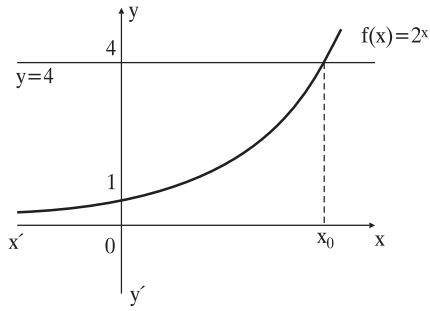
- ε) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = k \cdot a^x$ είναι η καμπύλη του σχήματος 22 να βρείτε τα k, a .



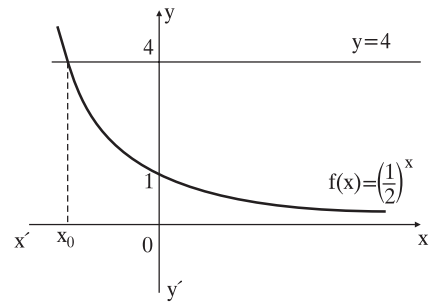
Σχ. 22

17. * Να βρείτε το σημείο x_0 σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

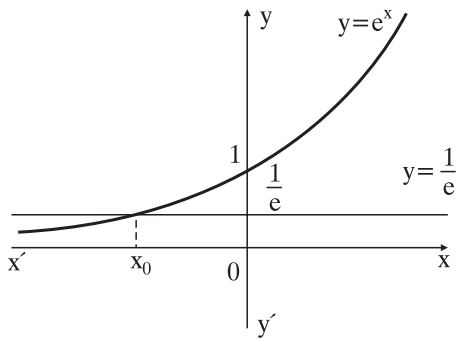
i)



ii)



iii)



iv)

