

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο
Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

• **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**

1. Δίνεται η εξίσωση $2y + x = 7$.

α) Να δείξετε ότι το ζεύγος $(-1, 4)$ είναι λύση αυτής της εξίσωσης.

β) Αν $x = 5$ να βρείτε $y = \dots\dots$ ώστε το ζεύγος $(5, y)$ να είναι λύση της εξίσωσης.

γ) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης $2y + x = 7$.

2. Δίνεται η εξίσωση $5x + y = 6$.

Αποδείξτε ότι το ζεύγος $(x = \kappa, y = 6 - 5\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$ επαληθεύει την εξίσωση.

3. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να σχεδιαστούν οι ευθείες που έχουν εξισώσεις τις:

α) $x = 2$ γ) $y = -\frac{1}{2}$

β) $y = 4$ δ) $x = y$

4. Όπως γνωρίζουμε, η εξίσωση $ax + by = \gamma$, όπου $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ παριστάνει ευθεία. Η εξίσωση $\kappa x + (\kappa + 1)y = 10$ παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του κ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5. Δίνεται η εξίσωση $8x + 2y = 7$ (1)

α) Να γραφεί μια άλλη εξίσωση που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την εξίσωση (1).

β) Να γραφεί μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).

6. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση: $3x - 4y = 5$.

α) Να γραφεί η εξίσωση ευθείας ε_2 που να ταυτίζεται με την ε .

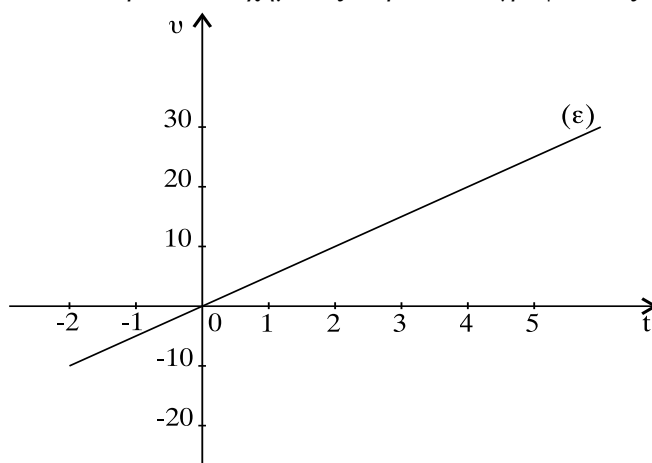
β) Να γραφεί η εξίσωση ευθείας ε_1 παράλληλης προς την ε .

7. Δίνεται η εξίσωση

$$v = 5t$$

όπου v η ταχύτητα ενός κινητού, t ο αντίστοιχος χρόνος κίνησης και $5 \text{ (m/sec}^2\text{)}$ η επιτάχυνση.

α) Η ευθεία ϵ του παραπάνω σχήματος παριστάνει γραφικά τις λύσεις της



εξίσωσης $v = 5t$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Πόση θα είναι η ταχύτητα του κινητού σε 4 sec από την εκκίνησή του;

γ) Εάν μετά από τα 4 sec το κινητό διατηρήσει την ταχύτητά του σταθερή:

i) ποια εξίσωση θα δίνει την ταχύτητά του;

ii) να παρασταθούν γραφικά οι λύσεις αυτής της εξίσωσης στο παραπάνω σχήμα.

8. Οι x , y , λ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει: $x = 2 - 3\lambda$ και $y = 5 + 2\lambda$.

α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y .

β) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, πού βρίσκονται τα ζεύγη (x, y) που επαληθεύουν την παραπάνω σχέση;

γ) Να γίνει γραφική παράσταση των ζευγών αυτών σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στη συνέχεια παρατίθεται μια μεγάλη σειρά ερωτήσεων (ερωτ. 9-17) πάνω στη λύση των συστημάτων δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, που είναι διαβαθμισμένες από την απλούστερη

στη συνθετότερη, έτσι ώστε ο διδάσκων να έχει τη δυνατότητα επιλογής σύμφωνα πάντοτε με τους στόχους της διδασκαλίας του.

9. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $x = 2$

$$2x - 3y + 7 = 0$$

β) $-3x - 7y + 13 = 0$

$$y = 2$$

γ) i) $x + y = 12$

$$x - y = 4$$

ii) $x + y = 2,3$

$$x - y = 2,7$$

δ) i) $y + 2 = 5$

$$3x - y = 9$$

ii) $x - y = 0$

$$2x + 3y = 15$$

ε) i) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 0$$

ii) $2x + 3y = 0$

$$2x - 5y = 0$$

στ) i) $3x + 2y = 5$

$$7x + 5y = 12$$

ii) $4x + 9y = -13$

$$6x + 3y = -9$$

ζ) i) $y = 2x + 5$

$$y = -2x + 1$$

ii) $y = 3x + 5$

$$y = 2x$$

η) i) $\frac{x}{y} = 6$

$$\frac{x}{6} = 5$$

ii) $\frac{x}{y} = 16$

$$x + y = 51$$

10. Να λυθούν με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

[Προτείνεται η μέθοδος της αντικατάστασης επειδή τα συστήματα (i) και (ii) της άσκησης α) έχουν εξισώσεις λυμένες ως προς τον έναν άγνωστο, στοιχείο που πρέπει ο μαθητής να παρατηρήσει και να αντιληφθεί έτσι ώστε συνειδητά να επιλέγει τη συγκεκριμένη μέθοδο σε ανάλογες περιπτώσεις].

$$\alpha) \text{ i) } x = 3y - 2 \quad \text{ii) } 4x - 5y = 13$$

$$3x - 5y = 13 \quad y = \frac{1}{2}x + 3,4$$

$$\beta) \text{ i) } x + 5y = 18 \quad \text{ii) } 4x - 7y = 24$$

$$2x + 7y = 13 \quad 3x - y = -5$$

11. Να λυθούν με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

[Προτείνεται η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών επειδή π.χ. στην άσκηση α (i) οι συντελεστές του x είναι αντίθετοι. Το στοιχείο αυτό θα πρέπει να παρατηρήσει και να αντιληφθεί ο μαθητής, έτσι ώστε συνειδητά να ακολουθεί τα βήματα της συγκεκριμένης μεθόδου].

$$\alpha) \text{ i) } 3x - 4y = 17 \quad \text{ii) } 5x - 7y - 47 = 0$$

$$-3x + 8y = 37 \quad 2x + 7y - 16 = 0$$

$$\beta) \text{ i) } 2x - 6y = 35 \quad \text{ii) } 0,5x + 0,2y = 16$$

$$-4x + 3y = 11 \quad 1,5x + 0,5y = 23$$

12. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με όποια μέθοδο θέλετε:

$$\alpha) \text{ i) } 5x - y = 13 \quad \text{ii) } 7x - 4y = 102$$

$$-2x + 3y = 28 \quad 5x + 4y = 42$$

$$\beta) \text{ i) } 7x - 4y = 23,7 \quad \text{ii) } 5,5x - 12y = 44,65$$

$$3x + 5y = 30,3 \quad 11,5x + 7,5y = 18,4$$

$$\gamma) \text{ i) } \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 5 \quad \text{ii) } \frac{3x}{4} - \frac{5x}{3} = 0$$

$$\frac{3x}{2} + \frac{2y}{3} = 22 \quad \frac{x}{10} - \frac{y}{15} = \frac{1}{6}$$

$$\delta) \text{ i) } 4x\sqrt{3} - 5y\sqrt{2} = 8 \quad \text{ii) } \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2$$

$$x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \qquad \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 5$$

$$\text{ε) i) } y = 3x - 13 \qquad \text{ii) } y = \frac{2}{3}x + 7$$

$$y = 5x - 15 \qquad y = \frac{5}{2}x - 12$$

13. Στις επόμενες ασκήσεις να γίνουν οι πράξεις, να φέρετε τις εξισώσεις στη μορφή $ax + by = \gamma$ και στη συνέχεια να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{α) } 3(x - 4) + 2(y + 2) = -9$$

$$(x - 5) - 4(y - 3) = 26$$

$$\text{β) } \frac{x-3}{14} = \frac{y-0,5}{5}$$

$$3(x - 3) - 8(y - 0,5) = 1$$

$$\text{γ) } \frac{1}{6}(5x - 1) + 0,1(4y - 5x) = \frac{1}{4}(3y - 8x) - \frac{1}{3}(0,29)$$

$$\frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{5}(3 - 2y) - \frac{1}{11}(x - 8) = 1,38$$

$$\text{δ) } \frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} + x = 8 - \frac{3y}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{y}{6} - \frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{6} - 2x + 6$$

$$\text{ε) } y = \frac{x}{4}$$

$$0,2(2x + 7y) - 1 = \frac{2}{3}(2x - 6y + 1)$$

14. Δίνεται το σύστημα: $5x + 8y = 91$

$$8x + 5y = 52$$

Προσθέστε κατά μέλη τις εξισώσεις του. Αφαιρέστε κατά μέλη τις εξισώσεις του.

[Προτείνεται η πρόσθεση και η αφαίρεση κατά μέλη διότι από αυτές προκύπτουν εξισώσεις με ίσους ή αντίθετους συντελεστές για τα x και y οπότε είναι πιθανή η απλοποίηση. Η απλοποίηση των παραστάσεων είναι βασικός και μόνιμα επιδιωκόμενος στόχος].

Στη συνέχεια να λύσετε το σύστημα των δύο νέων εξισώσεων που προέκυψαν.

15. Να λύσετε το σύστημα: $4x - 5y = 27$
 $- 3x + 4y = - 27$

(Ξεκινήστε με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεών του).

16. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αναλογιών:

α) $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$ β) $\frac{x}{7} = \frac{y}{5}$ γ) $\frac{x}{8} = \frac{y}{3}$
 $2x + 3y = - 9,3$ $x + y = 24$ $x - y = 20$

17. Να λύσετε με τη βοήθεια των οριζουσών τα συστήματα:

α) $x + y = \frac{5}{2}$ β) $- 2x + y = 1$
 $x - y = 1$ $x + 2y = 0$

γ) $2x + y = 3$ δ) $10x - 5y = 1$
 $4x + 2y = 6$ $2x - y = \frac{1}{4}$

ε) $2x - 1 + \frac{1}{3} (3y - 2) + y = 2$ στ) $2\alpha + \beta - 7 = 0$

$x - 1 + y = 0$ $3\alpha - 5\beta = 4$

ζ) $\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{8\alpha - 5\beta}{12} = - \frac{21}{4}$ η) $2(\kappa - 3\nu + 1) = 4\kappa - \nu - 205$

$$2\alpha + \frac{\beta}{7} = -9$$

$$\frac{3}{4}\kappa - \frac{5}{6}(v+1) = \kappa - \frac{3}{5}v - 13$$

$$\theta) \frac{x-1}{x-2} + \frac{y+1}{y+3} = 2$$

$$\iota) \frac{\alpha-6}{\beta-1} = 5$$

$$2x - y = 7$$

$$\frac{\alpha-3}{\beta+1} = \frac{3}{2}$$

18. Να προσδιοριστούν οι συντελεστές α και β στην εξίσωση $\alpha x + \beta y - 9 = 0$ εάν δοθεί ότι τα ζεύγη $(1,1)$ και $(-1, 5)$ είναι λύσεις της εξίσωσης αυτής.

19. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

20. Να βρεθεί το σύστημα των εξισώσεων που έχουν γραφικές παραστάσεις τις ευθείες ε_1 , ε_2 του διπλανού σχήματος. Μετά να βρεθεί το κοινό σημείο των ε_1 , ε_2 .

21. Να βρεθούν οι σχετικές θέσεις των παρακάτω ευθειών:

$$\varepsilon_1: 2x + 3y = 7$$

$$\varepsilon_2: -x + y = 4$$

$$\varepsilon_3: -2x + 2y = 5$$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x - \kappa \cdot 3^x + \lambda$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{Z} .

Να βρεθούν οι κ, λ όταν $f(0) = 0$ και $f(1) = \frac{11}{2}$.

23. Να λυθεί η εξίσωση: $|x - 3y + 1| + |2x + y - 5| = 0$

24. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε τα συστήματα Σ_1 και Σ_2 να είναι συγχρόνως αδύνατα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} (\alpha - 1)x - \beta y = 2 \\ \alpha x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -x + \alpha y = 2 \end{cases}$$

25. Δίνονται τα συστήματα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} (\alpha + 1)x - \beta y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} x + (\beta + 2)y = \alpha^2 + 1 \\ x - (\alpha - 1)y = \beta^3 \end{cases}$$

Δείξτε ότι αν το πρώτο έχει άπειρες λύσεις, τότε το δεύτερο είναι αδύνατο.

26. Δίνεται το σύστημα:

$$2x - 3y = 11 - \lambda$$

$$x + 5y - \lambda = 7, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Αποδείξτε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ .

β) Υπολογίστε τα x και y .

γ) Για ποια τιμή του λ η λύση (x, y) που βρήκατε στο (β) επαληθεύει τη

$$\text{σχέση: } x + y = \frac{11}{13}$$

27. Δίνονται οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με εξισώσεις $x - y = -1$ και $\lambda x - y = -1$ αντίστοιχα, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις σχετικές τους θέσεις για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το λ για το οποίο τέμνονται κάθετα.

γ) Για το λ που βρήκατε στο (β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ευθείες και τον άξονα $x'x$.

28. Η λύση ενός συστήματος με αγνώστους x και y είναι:

$$x = 2t, \quad y = 3t - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

α) Για ποιες τιμές του $t \in \mathbb{R}$ οι λύσεις του συστήματος είναι θετικοί αριθμοί;

β) Υπάρχει γραμμή και ποια πάνω στην οποία βρίσκονται οι λύσεις του συστήματος;

29. Δίνεται το σύστημα: $(2\mu - 3)x + y = \mu + 4$

$$5\mu x - 3y = 3\mu + 2, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(10, t)$ να βρεθεί το $t \in \mathbb{R}^*$

30. Να βρείτε τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x - y &= -z \\ x + y &= 3z + 2 \end{aligned}$$

αν ξέρουμε ότι x, y, z είναι ακέραιοι και επιπλέον ότι ο z είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης ακέραιου δια του 3.

31. Τα συστήματα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \Sigma_2: \begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = -7 + 3\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

έχουν κοινή λύση το ζεύγος (x_0, y_0) .

Να υπολογίσετε τα λ και μ και στη συνέχεια να βρείτε τη λύση του συστήματος.

32. Δίνεται το σύστημα $x + 2y = 5$

$$3x + y = 5$$

$$2x - y = \alpha$$

i) Να οριστεί η τιμή της παραμέτρου α ώστε οι ευθείες που παριστάνουν οι πιο πάνω εξισώσεις να περνούν από το ίδιο σημείο.

ii) Αν $\alpha \neq 0$ δείξτε ότι οι παραπάνω ευθείες σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

33. Για ποιες τιμές των x και y η εξίσωση $x - 2y + 1 + \lambda(x - y) = 0$ αληθεύει για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ ;

34. Για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού k το σύστημα:

$$x + ky = 3$$

$$kx + 4y = 6$$

δέχεται μία λύση που είναι ζεύγος φυσικών αριθμών.

35. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D_x + D_y = D$$

$$D_x - D_y = 3D$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.

36. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 = 2D_x D_y \text{ και } D \neq 0$$

Αν $x + y = 6$, να βρεθούν τα x, y .

37. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$$

α) Δείξτε ότι: $(D - 2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$.

β) Να βρεθούν τα x, y .

38. Ένας φοιτητής ξοδεύει 5.000 δρχ. την ημέρα για φαγητό και ψυχαγωγία.

Πόσα χρήματα μπορεί να ξοδέψει για φαγητό και πόσα για ψυχαγωγία;

α) Γράψε μια πιθανή επιλογή του φοιτητή.

β) Αν ξοδέψει για φαγητό 3.000 δρχ. πόσα μπορεί να ξοδέψει για ψυχαγωγία;

.....

γ) Αν ξοδέψει για ψυχαγωγία 4.000 δρχ. πόσα μπορεί να ξοδέψει για φαγητό;

.....

δ) Το ζεύγος (1500, 3500) είναι μια λύση του προβλήματος;

ε) Γράψε υπό μορφή ζευγών τρεις ακόμη λύσεις του προβλήματος.

στ) Αν ξοδέψει για φαγητό x δρχ. τότε για ψυχαγωγία πόσα μπορεί να ξοδέψει; $y = \dots - \dots$

ζ) Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να σου δώσει όλες τις λύσεις του προβλήματος;

η) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσεις γραφικά τις λύσεις που βρήκες στις ερωτήσεις β, γ, ε.

39. Ο Γιάννης είναι 5 χρόνια μικρότερος από τον Κώστα.

Πόσων χρόνων μπορεί να είναι ο καθένας;

- α) Γράψε μια πιθανή απάντηση για την ηλικία του καθενός.
- β) Γράψε δύο ζεύγη αριθμών που να είναι λύσεις του προβλήματος.
- γ) Αν η ηλικία του Γιάννη είναι x και του Κώστα y γράψε την εξίσωση που μπορεί να δώσει τις λύσεις του προβλήματος.
- δ) Ποια είναι η μικρότερη ακέραιη τιμή που μπορεί να πάρει ο x ;
- ε) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο y ;

40. Σ' ένα πορτοφόλι υπάρχουν 4200 δρχ. σε πενηντόδραγμα και εκατόδραγμα.

Πόσα πενηντόδραγμα και πόσα εκατόδραγμα υπάρχουν στο πορτοφόλι;

- α) Γράψε μια εξίσωση με δύο αγνώστους x και y που να λύνει το πρόβλημα.
- β) Το πρόβλημα αυτό έχει μία ή περισσότερες λύσεις; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.
- γ) Είναι δυνατόν ο αριθμός των πενηντόδραμων (x) να είναι ίσος με τον αριθμό των εκατόδραμων (y); Αν ναι, πόσα θα είναι τα πενηντόδραγμα και πόσα τα εκατόδραγμα; Αν όχι, γιατί;
- δ) Είναι δυνατόν τα εκατόδραγμα να είναι τριπλάσια από τα πενηντόδραγμα; Αν ναι, πόσα θα είναι τα πενηντόδραγμα και πόσα τα εκατόδραγμα; Αν όχι, γιατί;

41. Ο Φοίβος ζητάει από το φίλο του τον Πάνο, που είναι φοιτητής του Πολυτεχνείου να του λύσει ένα πρόβλημα. Μεταξύ τους γίνεται ο εξής διάλογος:

Φοίβος - *Όταν ήμουν για διακοπές στην Κρήτη νοίκιασα ένα πετρελαιοκίνητο αυτοκίνητο για πέντε μέρες. Θυμάμαι τους όρους ενοικίασης, 10.000 δρχ. την ημέρα και 50 δρχ. το χιλιόμετρο, αλλά έχω ξεχάσει πόσα χιλιόμετρα έκανα και πόσα χρήματα πλήρωσα συνολικά. Μπορείς να μου τα βρεις;*

Πάνος - *Μ' αυτές τις πληροφορίες που μου δίνεις δεν μπορώ να τα βρω γιατί έχω δύο αγνώστους, x τα χιλιόμετρα που έκανες και y τα χρήματα που έδωσες.*

Μ' αυτούς μπορώ να φτιάξω μια εξίσωση

$$50000 + 50x = y \quad (1)$$

και από αυτήν μπορώ να σου βρω πολλές πιθανές λύσεις. Προσπάθησε να θυμηθείς κάτι ακόμη.

Φοίβος - *Θυμήθηκα! Νοικιάζοντας αυτοκίνητο πετρελαιοκίνητο αντί για βενζινοκίνητο πλήρωσα 5.000 δρχ. λιγότερο.*

Πάνος - *Δεν μου φτάνει αυτό. Ψάξε να βρεις τους όρους ενοικίασης ενός βενζινοκίνητου αυτοκινήτου και θα σου λύσω το πρόβλημα.*

Φοίβος - *(μετά από τηλεφώνημα στο γραφείο ενοικιάσεων). Λοιπόν, 9.000 δρχ. την ημέρα και 60 δρχ. το χιλιόμετρο για το βενζινοκίνητο.*

Πάνος - *Με τις νέες πληροφορίες μπορώ να σου φτιάξω άλλη μια εξίσωση:*

$$40000 + 60x = y \quad (2)$$

Μ' αυτές τις δύο εξισώσεις μπορώ να λύσω το πρόβλημα.

Ερωτήσεις:

- α) Με ποια δεδομένα και πώς έφτιαξε ο Πάνος την εξίσωση (1);
- β) Να εξηγήσετε την πρώτη απάντηση του Πάνου.
- γ) Να βρείτε δύο λύσεις της εξίσωσης (1).
- δ) Με ποια δεδομένα και πώς έφτιαξε ο Πάνος την εξίσωση (2);
- ε) Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση (2);
- στ) Να βρείτε δύο λύσεις της εξίσωσης (2).
- ζ) Να εξηγήσετε την τελευταία φράση του Πάνου:

«Μ' αυτές τις δύο εξισώσεις μπορώ να λύσω το πρόβλημα».

η) Να βρείτε γραφικά τη λύση του προβλήματος.

Υπόδειξη: Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, στον άξονα των τετμημένων, αντιστοιχίστε 1 cm σε 200 km και στον άξονα των τεταγμένων αντιστοιχίστε 1 cm σε 20000 δρχ.

42. Δύο φίλοι Α και Β έχουν άθροισμα ηλικιών 35 χρόνια.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός;

Αν ναι, ποιες είναι οι ηλικίες τους; Αν όχι, γιατί;

β) Εάν σας έδιναν και ένα δεδομένο ακόμη: «Η διαφορά των ηλικιών των

A και B είναι 5 χρόνια», πώς θα υπολογίζατε τις ηλικίες αυτές;

43. Σε μια βιοτεχνία επίπλων χρησιμοποιούν δύο τύπους ξύλου: καρυδιά και καστανιά. Η βιοτεχνία διαθέτει ένα απόθεμα 40 m^3 καρυδιάς και 60 m^3 καστανιάς για την κατασκευή γραφείων και βιβλιοθηκών. Οι ποσότητες ξύλου σε m^3 που απαιτούνται για την κατασκευή ενός γραφείου και μιας βιβλιοθήκης είναι οι εξής:

	Καρυδιά m^3	Καστανιά m^3
Γραφείο	0,20	0,15
Βιβλιοθήκη	0,10	0,20

Πόσα γραφεία και πόσες βιβλιοθήκες μπορεί να φτιάξει η βιοτεχνία αυτή με το απόθεμα που διαθέτει;

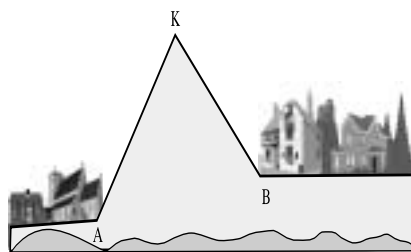
Υπόδειξη: Ονόμασε x τον αριθμό των γραφείων και y τον αριθμό των βιβλιοθηκών. Γράψε μια εξίσωση για το απόθεμα της καρυδιάς και μια άλλη για το απόθεμα της καστανιάς.

44. Στην οργάνωση μιας εκδρομής ενός Σχολείου της Αθήνας για την Πορταριά του Πηλίου οι μαθητές έθεσαν στον οδηγό τα ερωτήματα: Τι ώρα πρέπει να ξεκινήσουν και πόση είναι η απόσταση Αθήνα-Πήλιο;
Ο οδηγός απάντησε: Εάν πάμε με ταχύτητα 60 km/h θα φτάσουμε στις $13.00'$. Εάν πάμε με 80 km/h θα φτάσουμε στις $11.00'$. Μπορείτε να βρείτε την απόσταση Αθήνας-Πορταριάς και την ώρα εκκίνησης του πούλμαν; (χρησιμοποιείστε τον τύπο $s = v \cdot t$).

46. Ένας ιδιώτης τοποθετεί ένα ποσό 1.350.000 δρχ. σε τράπεζα χωρίζοντάς το σε δύο μέρη. Το ένα μέρος του ποσού τοκίζεται με επιτόκιο 10% και το δεύτερο με επιτόκιο 8%. Να βρείτε καθένα απ' αυτά τα δύο μέρη αν γνωρίζετε ότι ο συνολικός ετήσιος τόκος είναι 130.500 δρχ.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ο δρόμος που συνδέει δύο πόλεις A και B, οι οποίες είναι κτισμένες στους πρόποδες ενός λόφου. Ένας οδηγός κινείται σ' αυτό το δρόμο. Όταν ανεβαίνει κρατάει σταθερή ταχύτητα

50 km/h και όταν κατεβαίνει 75 km/h. Για να μεταβεί από την πόλη A στην πόλη B θέλει 16 min και από την πόλη B στην πόλη A 14 min.



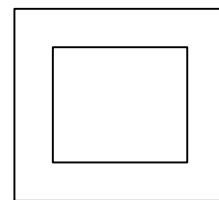
- α) Να γράψετε συναρτήσει των αποστάσεων KA και KB το χρόνο των εξής διαδρομών:

t_1 - της ανόδου από το A προς το K, t_2 - της καθόδου από το K προς το B
 t_3 - της ανόδου από το B προς το K, t_4 - της καθόδου από το K προς το A.

- β) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις KA και KB

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο $t = s/v$.

47. Δύο τετράγωνα με κέντρο O βρίσκονται το ένα μέσα στο άλλο. Η διαφορά των περιμέτρων τους είναι ίση με 40 m. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος είναι ίσο με 500 m². Πόσο είναι το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου;



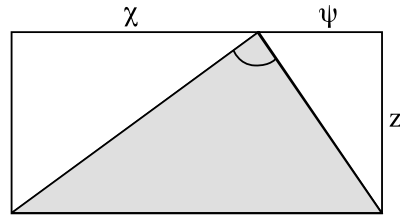
- 48.** Ο Μάριος, η Ελένη και ο Νίκος βγαίνουν από ένα φούρνο όπου αγόρασαν κρουασάν και τυρόπιτες. Ένας φίλος τους ρωτάει: «Πόσο κάνει η τυρόπιτα και πόσο το κρουασάν»;
- Μάριος: Πλήρωσα 2.400 δρχ. για 4 κρουασάν και 6 τυρόπιτες.
 - Ελένη: Πλήρωσα 1050 δρχ. για 3 κρουασάν και 2 τυρόπιτες.
 - Νίκος: Πλήρωσα 1.200 δρχ. για 2 κρουασάν και 3 τυρόπιτες.
- α) Με μία μόνο από τις τρεις πληροφορίες μπορεί κανείς να υπολογίσει την τιμή ενός κρουασάν και μιας τυρόπιτας; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- β) Με δύο οποιεσδήποτε από τις τρεις πληροφορίες μπορεί κανείς να υπολογίσει την τιμή ενός κρουασάν και μιας τυρόπιτας; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- Υπόδειξη: Να παρατηρήσετε τις τρεις δυνατές περιπτώσεις.
- 49.** Σ' ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα. Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες, πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ;
- 50.** Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{8}$ του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το $\frac{1}{2}$ του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλευσε.

51. Σ' ένα σύμπλεγμα αγαλμάτων που απεικονίζονται ο Ζήθος, ο αδελφός του Αμφίονας και η μητέρα τους, υπάρχει επιγραφή που δίνει την παρακάτω πληροφορία για την αξία των τριών αγαλμάτων με τα λόγια του Ζήθου:
«Εγώ, ο αδελφός μου και η μητέρα μου μαζί κοστίσαμε 26 μνας, ενώ εγώ και ο αδελφός μου μαζί 20 μνας. Αν πάρεις το $\frac{1}{3}$ της δικής μου αξίας και το $\frac{1}{4}$ της αξίας του Αμφίονα, θα έχεις την αξία του αγάλματος της μητέρας μας». Πόσο κόστισε καθένα από τα τρία αγάλματα;
52. Σε μια κάλπη βρίσκονται 100 ψηφοδέλτια δύο συνδικαλιστικών φορέων Α και Β. Αν προστεθούν στην κάλπη 3 ψηφοδέλτια του Α συνδικαλιστικού φορέα και 2 του Β συνδικαλιστικού φορέα τότε τα ψηφοδέλτια του Α θα είναι διπλάσια των ψηφοδελτίων του Β. Πόσα ψηφοδέλτια κάθε συνδικαλιστικού φορέα υπήρχαν αρχικά στην κάλπη;
53. Κάποιος μοιράζει με διαθήκη ένα ποσό σε τρεις ανηψιούς του Α, Β, Γ άνισα, ανάλογα προς τους αριθμούς 7, 6 και 5. Στη συνέχεια, με μια δεύτερη διαθήκη, αλλάζει τα μερίδια και διανέμει το ποσό ανάλογα προς τους αριθμούς 6, 5 και 4.
α) Ποιος από τους κληρονόμους κερδίζει με τη νέα μοιρασιά; Ποιος χάνει;
β) Ένας από τους κληρονόμους κερδίζει με τη δεύτερη μοιρασιά 6.000 δρχ. περισσότερο απ' ότι κερδίζει με την πρώτη. Πόση ήταν η κληρονομιά και πόσο κάθε μερίδιο με τη δεύτερη μοιρασιά;
54. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η εξωτερική της γωνίας Α είναι 120° και η διαφορά των γωνιών Β και Γ είναι 30° ($B > \Gamma$). Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

55. α) Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί a και β . Υπάρχουν πάντοτε δύο άλλοι πραγματικοί αριθμοί, που να έχουν άθροισμα a και διαφορά β ;
 β) Δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί a και β . Υπάρχουν πάντοτε δύο άλλοι φυσικοί των οποίων το άθροισμα να είναι a και η διαφορά β ;
56. Οι δίσκοι της δισκοθήκης ενός μαθητή τοποθετούνται από τον ίδιο σε τρεις φακέλους για να μεταφερθούν στο σχολείο του, όπου θα γίνει μια μουσική εκδήλωση.
 Ο 1^{ος} και ο 2^{ος} φάκελος περιέχουν 40 δίσκους, ο 2^{ος} και ο 3^{ος} 50 δίσκους και ο 1^{ος} και ο 3^{ος} 30 δίσκους. Πόσους δίσκους έχει κάθε φάκελος;
57. Να βρεθεί τριψήφιος φυσικός αριθμός αν:
 α) το άθροισμα των ψηφίων του είναι 24.
 β) ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9 στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του
 γ) ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90 στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του.
Υπόδειξη: Ένας τριψήφιος αριθμός γράφεται: $100\varepsilon + 10\delta + \mu$ όπου ε το ψηφίο των εκατοντάδων, δ το ψηφίο των δεκάδων και μ το ψηφίο των μονάδων.
58. Ένα πρόβλημα του Διοφάντου (325-409 μ.Χ.)
Το παρακάτω πρόβλημα διατυπώθηκε από το Διόφαντο και προκάλεσε το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών. Του Luca Pacioli (15^{ος} αι.), των Tartaglia και Viète (16^{ος} αι.) και του Euler (18^{ος} αι.). Βρίσκεται στο σύγγραμμα Logistique de Buteon (1559 μ.Χ.) και η εκφώνησή του έχει ως εξής:
 «Δίνεται ένας οποιοσδήποτε αριθμός. Να βρείτε τρεις αριθμούς από τους οποίους ο πρώτος με το ήμισυ των δύο άλλων, ο δεύτερος με το $\frac{1}{3}$ των δύο άλλων και ο τρίτος με το $\frac{1}{4}$ των άλλων να έχουν άθροισμα τον δοθέντα αριθμό».
 Να λυθεί το πρόβλημα όταν ο αριθμός που δίνεται είναι ο 136.
59. Δύο κινητά κινούνται ευθύγραμμα στο επίπεδο, το πρώτο από το σημείο

(- 2, 1) προς το (10, 10) και το δεύτερο από το (- 5, 5) προς το (10, - 2). Να βρείτε το κοινό σημείο της διαδρομής τους.

60. Στο διπλανό σχήμα γνωρίζουμε την περίμετρο του ορθογωνίου που είναι 36 cm και ότι τα μήκη x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 4, 2, 3 αντίστοιχα. Να βρεθούν οι πλευρές και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου.



61. Το παρακάτω μαγικό τετράγωνο το συμπληρώνουμε με τους αριθμούς 1 έως 9 έτσι ώστε κάθε αριθμός χρησιμοποιείται μόνο μια φορά και κάθε γραμμή, κάθε στήλη και κάθε διαγώνιος δίνει το ίδιο άθροισμα, Σ .

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

Δείξτε ότι:

i) $\Sigma = 15$

ii) Το κεντρικό τετράγωνο x_5 περιέχει τον αριθμό 5.