

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο
Εξισώσεις - Ανισώσεις Δευτέρου Βαθμού

• **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**

1. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 2x - \frac{1}{9}$$

2. Αν η εξίσωση $(2x - 3)|\lambda| + 3 = 2\lambda^2x$ έχει ρίζα τον αριθμό 2, να υπολογιστεί ο λ .

3. α) Αν x, y ρητοί, $\lambda > 0$ και $\sqrt{\lambda}$ άρρητος τότε να αποδείξετε ότι:

$$x + y\sqrt{\lambda} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } y = 0$$

β) Να δειχθεί ότι: αν $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$, ρητοί αριθμοί, $\lambda > 0$ και $\sqrt{\lambda}$ άρρητος και η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, έχει ρίζα τον αριθμό $\kappa + \sqrt{\lambda}$, τότε η εξίσωση αυτή έχει για ρίζα και τον συζυγή του, $\kappa - \sqrt{\lambda}$.

4. Αν είναι $\alpha + \beta + \gamma = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

5. Αν p είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 + ax + \beta = 0$ να αποδειχθεί ότι

$$|p|^2 \leq |\alpha| |p| + |\beta|.$$

6. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3x^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)x + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 0$ έχει μια διπλή ρίζα, αν και μόνον αν $\alpha = \beta = \gamma$.

7. Να δειχθεί ότι: αν η εξίσωση $(2\alpha - \beta)x^2 - 4\alpha x + 4\beta = 0$ έχει διπλή ρίζα, τότε η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2x + 3(\alpha - \beta) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

8. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 + 2x - \mu + 3 = 0$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του μ :
- αυτή έχει δύο διαφορετικές ρίζες
 - αυτή έχει μια διπλή ρίζα
 - δεν έχει ρίζες.
9. Αν ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 \neq \rho_2$) είναι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ να βρεθούν οι παραστάσεις:
- $|\rho_1 - \rho_2|$, ii) $|\rho_1^2 - \rho_2^2|$
10. Να βρείτε όλες τις εξισώσεις β' βαθμού που το άθροισμα των ριζών τους είναι ίσο με το γινόμενό τους.
11. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - kx + \lambda = 0$, δείξτε ότι:

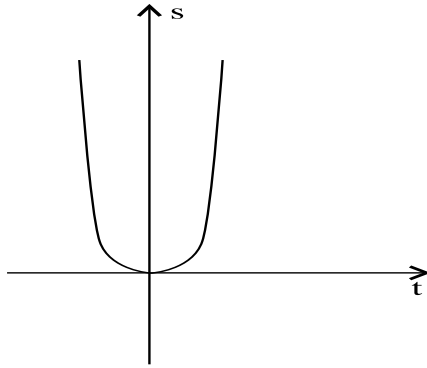
$$|\rho_1| + |\rho_2| = \begin{cases} |k| & , \text{αν } \lambda \geq 0 \\ \sqrt{k^2 - 4\lambda} & , \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

12. Γράψτε την εξίσωση που έχει αντίθετες ρίζες από τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 6 = 0$.
13. Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 - \lambda(2x - 3) = 0$ που έχει ρίζες ρ_1 και ρ_2 .
Να αποδειχθεί ότι η παράσταση $(x_1 - \frac{3}{2})(x_2 - \frac{3}{2})$ είναι ανεξάρτητη του λ .

14. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ να βρείτε εξίσωση δευτέρου βαθμού που να δέχεται ως ρίζες τις παραστάσεις:
 $\frac{1}{ax_1 + \beta}, \frac{1}{ax_2 + \beta}$ χωρίς να υπολογίσετε τις x_1, x_2 .
15. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της $a'x^2 + b'x + \gamma' = 0$ να βρείτε εξίσωση που να έχει ως ρίζες τις παραστάσεις:
 $x_1\rho_1 + x_2\rho_2, x_1\rho_2 + \rho_2x_1$.
16. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$ και $\Delta \geq 0$. Να δειχθεί ότι:
 α) οι ρίζες της είναι αντίθετες αν και μόνον αν $\beta = 0$
 β) οι ρίζες της είναι αντίστροφες αν και μόνον αν $a = \gamma$.
17. Η εξίσωση $(a^2 - \beta^2)x^2 + \beta = 0$ όπου a, β πραγματικές παράμετροι με $0 < a < \beta$ έχει λύση; Αν όχι, γιατί; Αν ναι, ποια;
18. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε η παραπάνω εξίσωση:
 α) να έχει μία μόνο ρίζα
 β) να έχει διπλή ρίζα
19. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για να είναι οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 2x + 3(\lambda - 7) = 0$
 i) θετικές, ii) ετερόσημες, iii) ίσες
20. Βρείτε την τιμή του λ ώστε: $(x - 2)(3x - 1) = 3x^2 + \lambda x + 2$

21. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (5\lambda - 6\mu)x - 1 = 0$ είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης $\lambda x^2 + 13x - \lambda\mu + \lambda^2 = 0$ με $\lambda \neq 0$ είναι αντίστροφες τότε:
- α) να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών παραμέτρων λ και μ
 β) να λυθούν οι εξισώσεις για τις τιμές των λ και μ που βρήκατε.

22. Δίνεται η εξίσωση $s = \frac{5}{2} t^2$ όπου s το διάστημα που διανύει ένα κινητό, t ο αντίστοιχος χρόνος κίνησης και $5 \text{ (m/sec}^2\text{)}$ η επιτάχυνση της κίνησης.



Η παραβολή του παραπάνω σχήματος παριστάνει γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης $s = \frac{5}{2} t^2$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

23. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 2(\mu + 1)x + \nu$.
 Να οριστούν οι μ, ν ώστε να έχει ρίζα τον αριθμό 1 και να δέχεται ελάχιστη τιμή για $x = -1$.
24. Να ορίσετε τους $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 + 8\lambda x - 24x + 5\kappa - 10$ να έχει μοναδικό κοινό σημείο με τους άξονες την αρχή τους.
 Για τις τιμές των κ, λ που βρήκατε να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της f .

25. Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι σταθερό. Ναδειχθεί ότι το γινόμενο τους γίνεται μέγιστο όταν οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι.

26. Ναλυθεί η εξίσωση:

$$(x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0$$

27. Ναλυθεί η εξίσωση:

$$x^4 - (\alpha + 1)x^2 + \alpha = 0$$

28. Δίνεται η εξίσωση $a|x-1| + 6|\beta| = 9 + \beta^2$, όπου a, β πραγματικές παράμετροι και $a \neq 0$. Υπολογίστε το β όταν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1.

29. Ναλυθεί η εξίσωση: $|x^2 - x| + |x^2 - 11x + 10| = 0$

30. Ναλυθεί η εξίσωση: $x - \sqrt{x} = 20$.

31. Ναλυθεί η εξίσωση: $(1 - |x|)^2 = 4$

32. Ναλυθεί η εξίσωση: $\frac{2}{|x|} = \frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}$

33. Ναλυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^4 - 3a^2x^2 - 4a^2 = 0$

β) $\gamma^4x^4 + (\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)x^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$

34. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 5 \\x + y &= 3\end{aligned}$$
35. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε $\alpha^2 + \beta^2 = 16$ και $\alpha + \beta = 6$.
36. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$ παριστάνει κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3. Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, τα κοινά σημεία του κύκλου με την ευθεία $x - y = 0$.
37. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία $y = \lambda x + 3$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$;
38. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για να είναι ρίζες της εξίσωσης $\chi^2 + \alpha\chi + \beta = 0$ ίσες με α και β .
39. Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $y = 3x + 3$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \frac{6}{x}$.
40. Δείξτε ότι η ευθεία $y = 3x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{6}{x}$ τέμνονται για οποιοδήποτε λ σε δύο σημεία.
41. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{4}{x}$ (1)
και η ευθεία $y = -x + \lambda$ (2) $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουν κοινά σημεία αν έχει λύσεις η εξίσωση $\frac{4}{x} = -x + \lambda$ (3)
- α) Βρείτε για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει λύσεις η εξίσωση (3).
β) Πόσα κοινά σημεία έχουν οι (1) και (2);
γ) Βρείτε για ποιο λ έχουν ένα κοινό σημείο και προσδιορίστε το.

42. Τα μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.
43. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 25 cm^2 . Πότε το ορθογώνιο έχει την ελάχιστη περίμετρο και ποια είναι αυτή;
44. Σε τραπέζιο το άθροισμα των βάσεων του και του ύψους του είναι 10.
 α) Για ποια τιμή του ύψους του το εμβαδόν του τραπέζιου γίνεται μέγιστο;
 β) Πόσο είναι το εμβαδόν αυτό;
45. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την πλευρά ενός άλλου τετραγώνου. Βρείτε τις πλευρές τους αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά των εμβαδών τους είναι 88 cm^2 .
46. Το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με n πλευρές δίνεται από τον τύπο: $\delta_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Αν το πολύγωνο έχει 104 διαγωνίους, πόσες είναι οι πλευρές του;
47. Το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών δίνεται από τον τύπο:

$$\Sigma_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
 Βρείτε το n , αν ξέρουμε ότι $\Sigma_n = 300$.
48. Το εμβαδόν μιας σελίδας ενός βιβλίου είναι 300 cm^2 . Αν το μήκος της είναι 5 cm μεγαλύτερο από το πλάτος της, βρείτε τις διαστάσεις της σελίδας.
49. Δύο φυσικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός έχουν άθροισμα 64.
 α) Πόσα ζεύγη τέτοιων αριθμών υπάρχουν;
 β) Ποιοι είναι οι αριθμοί όταν το γινόμενό τους μεγιστοποιείται;

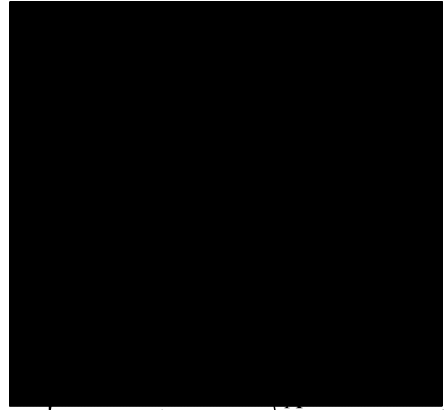
50. Να αποδείξετε ότι αν το $7x - 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε και το τριώνυμο $28x^2 - 13x - 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3.
51. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των p και q ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + px + q = 0$ με $p, q \in \mathbb{R}$ να είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 2 και 3.
52. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1)
- να βρείτε τη σχέση μεταξύ των β και γ για να είναι μια ρίζα της (1) διπλάσια της άλλης
 - αν $\beta = -2$, τότε ορίστε τον γ ώστε η μια ρίζα της (1) να είναι το τετράγωνο της άλλης
 - βρείτε το σύνολο των δευτεροβάθμιων εξισώσεων με ρίζες τα τετράγωνα των ριζών της (1).
53. Αν α, β, γ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου, να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση: $x^2 - 2\alpha x + (\beta + \gamma)^2 > 0$.
54. Ένας χορογράφος σχεδιάζοντας τις θέσεις των χορευτών σε κάποια χορογραφία θέλει να τους διατάξει σε τετράγωνο. Εάν σχηματίσει x σειρές με x χορευτές (στην κάθε σειρά) θα του περισσέψουν 10 χορευτές. Εάν προσθέσει 2 χορευτές σε κάθε σειρά και σχηματίσει ένα νέο τετράγωνο θα του λείπουν 10 χορευτές. Να βρείτε τον αριθμό x των χορευτών μιας σειράς του a' τετραγώνου και το συνολικό αριθμό y των χορευτών.
55. Ένα αγρόκτημα οργώνεται από δύο τρακτέρ Α και Β, αν δουλέψουν συγχρόνως, σε 6 ώρες. Αν οργώσει το κτήμα μόνο το τρακτέρ Α τότε χρειάζονται 5 ώρες περισσότερες, από όσες χρειάζονται, για να το οργώσει το τρακτέρ Β. Να βρεθεί σε πόσες ώρες καθένα τρακτέρ οργώνει μόνο του το αγρόκτημα.



56. α) Να βρεθεί η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι η παραβολή του διπλανού σχήματος.

β) Αν το τμήμα ΟΚΑ της παραβολής αυτής παριστάνει μια σήραγγα και στο σημείο της Σ_1 θέλουμε να εγκαταστήσουμε πυροσβεστικό κρουνό που θα

απέχει 2,75 m από τον άξονα $x'x$ να βρεθεί το μήκος του σωλήνα $\Sigma\Sigma_1$, που είναι κάθετος στον άξονα $y'y$.



57. Σε μια εκπομπή της τηλεόρασης με συμβουλές προς οδηγούς δόθηκε το εξής στοιχείο:

Ένα αυτοκίνητο που τρέχει με σταθερή ταχύτητα 120 km/h σε περίπτωση που συναντήσει εμπόδιο και φρενάρει θέλει 113 m για να σταματήσει. Να υπολογιστεί:

α) η επιβράδυνση της κίνησης μετά το φρενάρισμα και

β) ο χρόνος που θα παρέλθει από τη στιγμή του φρεναρίσματος μέχρι την ακινητοποίηση του αυτοκινήτου.

Υπόδειξη: Λύστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τους τύπους $v = v_0 + at$ και $s = v_0t + \frac{1}{2} at^2$.

Προσοχή στις μονάδες.

58. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 5)x + \mu - 4 = 0$. Να προσδιοριστούν τα λ και μ εάν δοθεί ότι αυτά είναι ίσα προς τα διπλάσια των ριζών της εξίσωσης.

59. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $(x - 1)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1) < 0$

β) $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 2x + 6) \geq 0$

γ) $x^2(3 - x^2) < 0$

δ) $(1 - 2x^2)(-x + 7) \leq 0$

ε) $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) > 0$ εάν $\alpha < \beta < \gamma$

$$\sigma\tau) (3x^3 - x^2)(x^2 - x + 1) < 0$$

$$\zeta) 3x^3 - 5x^2 + 2x \geq 0$$

$$\eta) \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 17x + 60} > 0$$

$$\theta) \frac{-x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 6} > 0$$

$$\iota) \frac{x+1}{7-x} > 2$$

60. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{x-1}{x+1} > 1 + \frac{2}{1-x}$$

$$\beta) \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1$$

$$\gamma) \frac{3}{x+1} - \frac{x-1}{x-4} > \frac{3}{2}$$

61. Για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\alpha) 3x + 7 > 0$$

$$\beta) x^2 - 6x + 5 > 0$$

62. Για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\alpha) 2x + 5 > 0$$

$$\beta) x - 2 < 0$$

$$\gamma) (x+4)(x-6) < 0$$

63. Για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{3x+5}{3x-7} < 0$$

$$\beta) \frac{12x^2 + 13x - 14}{x-2} < 0$$

64. Για ποιες τιμές του x ισχύει η διπλή ανίσωση:

$$-2 < \frac{2x-1}{x^2-3x+2} < 1$$

65. Για ποιες τιμές του x το τριώνυμο $x^2 - 14x + 50$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 5 και μικρότερες του 26;

66. Να λυθεί η ανίσωση: $|x| > 4x$

67. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{|x^2 + 8x + 9|} - 24$

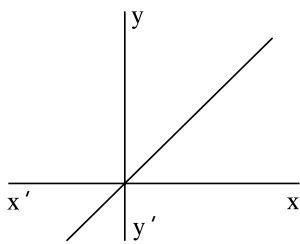
Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

68. Ναδειχθεί ότι: $\frac{1}{3} < \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x .

69. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις:

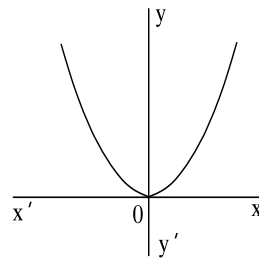
της ευθείας

$$y = x$$



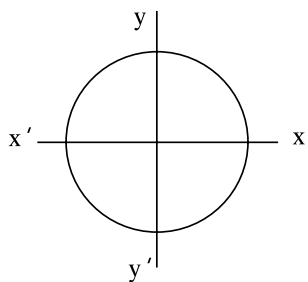
της παραβολής

$$y = x^2$$



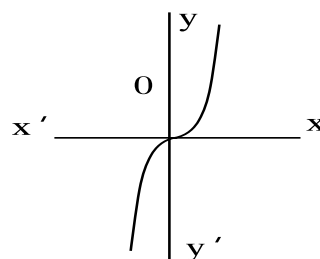
του κύκλου

$$x^2 + y^2 = 9$$



της συνάρτησης

$$y = x^3$$



α) Συμπληρώστε τον πίνακα

Εξίσωση	Βαθμός εξίσωσης ως προς x	Βαθμός εξίσωσης ως προς y	Γραφική παράσταση (ευθεία ή καμπύλη)
$y = x$			
$y = x^2$			
$x^2 + y^2 = 9$			
$y = x^3$			

β) Συμπληρώστε τις φράσεις:

Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ βαθμού ως προς x, βαθμού ως προς y παριστάνει γραφικά

Η εξίσωση $y = ax^2$ βαθμού ως προς x, βαθμού ως προς y παριστάνει γραφικά

Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$ βαθμού ως προς x, βαθμού ως προς y παριστάνει γραφικά

Η εξίσωση $y = x^3$ βαθμού ως προς x, βαθμού ως προς y παριστάνει γραφικά

γ) Στα παραπάνω σχήματα να τμήσετε την $y = x$, με μία ευθεία ϵ_1 , την $y = x^2$ με μία ευθεία ϵ_2 , την $x^2 + y^2 = 9$ με μία ευθεία ϵ_3 και στη συνέχεια συμπληρώστε τις φράσεις:

η $y = x$ και μια ευθεία μπορεί να έχουν κοινά σημεία

η $y = x^2$ και μια ευθεία μπορεί να έχουν κοινά σημεία

η $x^2 + y^2 = 9$ και μια ευθεία μπορεί να έχουν κοινά σημεία

* στα κενά να γραφούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις

δ) i) Η καμπύλη $y = x^3$ πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει με μια ευθεία;

ii) Η $y = x^3$ πόσα κοινά σημεία έχει με τον άξονα των τετμημένων;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ε) Ένα σύστημα δευτέρου βαθμού ορίζεται από τις εξισώσεις

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{και} \quad \beta x + \gamma y = 5$$

Πόσες λύσεις μπορεί να έχει; Δικαιολογήστε την απάντησή σας λαμβάνοντας υπόψη τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων του συστήματος.