ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

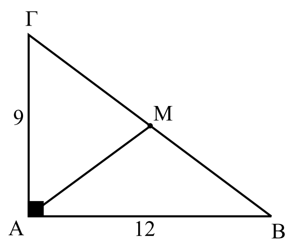
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει Α = 90°, β = 9 cm, γ = 12 cm και την ΑΜ διάμεσο. Το μήκος του ΑΜ ισούται με:

Α. $\frac{9}{2}$ **Β.** 6 **Γ.** $\frac{15}{2}$

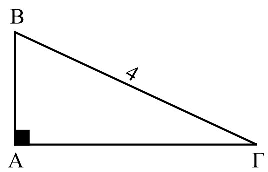
Δ. 9 **Ε.** $\frac{21}{2}$



2. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α = 90°, α = 4 cm και β + γ = $\sqrt{18}$ cm. Το γινόμενο β.γ ισούται με:

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 4

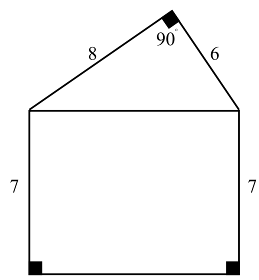
Δ. 8 **Ε.** 16



3. Η περίμετρος του διπλανού σχήματος είναι:

Α. 34 **Β.** 36 **Γ.** 38

Δ. 45 **Ε.** 46

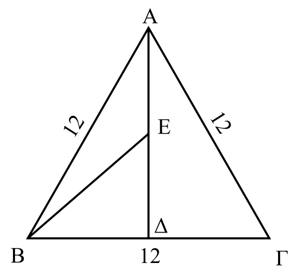


4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά 12 cm. Αν ΑΔ είναι ύψος του και το Ε είναι μέσον του ύψους του, τότε το μήκος του ΒΕ σε cm είναι:

Α. 9 **Β.** $\sqrt{48}$ **Γ.** 8

Δ. $\sqrt{63}$ **Ε.** $\sqrt{98}$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1993)

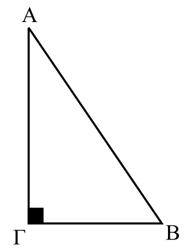


5. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο από τις παρακάτω σχέσεις, σωστή είναι η σχέση:

Α. $ΑΓ^2 = ΓΒ^2 + ΒΑ^2$ **Β.** $ΑΓ^2 = ΒΑ^2 - ΓΒ^2$

Γ. $ΓΒ^2 = ΓΑ^2 - ΑΒ^2$ **Δ.** $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 - ΓΒ^2$

Ε. $ΒΑ^2 = ΒΓ^2 - ΑΓ^2$

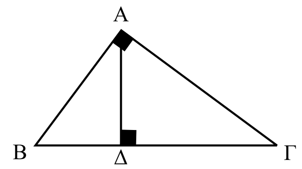


6. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο από τις παρακάτω σχέσεις, σωστή είναι η σχέση:

Α. $ΑΓ^2 = ΒΓ.ΒΔ$ **Β.** $ΑΓ^2 = ΒΓ.ΑΔ$

Γ. $ΑΒ^2 = ΑΓ.ΑΔ$ **Δ.** $ΑΒ^2 = ΒΓ.ΒΔ$

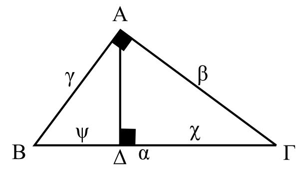
Ε. $ΒΓ^2 = ΒΔ.ΑΓ$



7. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο από τις παρακάτω σχέσεις, λάθος είναι η σχέση:

Α. $β^2 = α^2 - γ^2$ **Β.** $β^2 = α.x$

Γ. $\dfrac{β^2}{γ^2} = \dfrac{x}{y}$ **Δ.** $\dfrac{x}{β^2} = \dfrac{y}{α^2}$ **Ε.** $γ^2 = α.y$

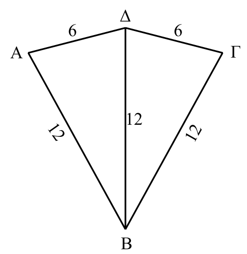


8. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε ΑΒ = ΒΔ = ΒΓ = 12 και ΑΔ = ΔΓ = 6. Το μήκος της ΑΓ είναι:

Α. $3\sqrt{15}$ **Β.** $4\sqrt{7}$ **Γ.** $5\sqrt{5}$

Δ. $6\sqrt{3}$ **Ε.** $8\sqrt{2}$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1991)

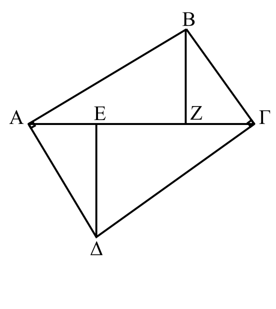


9. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει Α = Γ = 90°. Αν ΒΖ, ΕΔ ⊥ ΑΓ και ΑΕ = 3, ΔΕ = 5, ΓΕ = 7, τότε η ΒΖ ισούται με:

Α. 3.6 **Β.** 4 **Γ.** 4.2

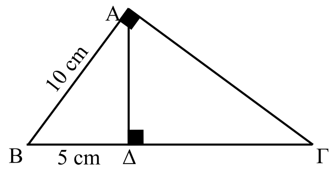
Δ. 4.5 **Ε.** 5

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1992)

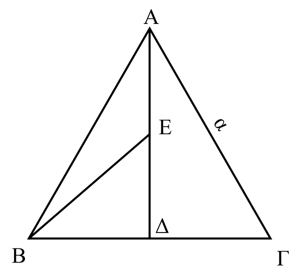


Ερωτήσεις διάταξης

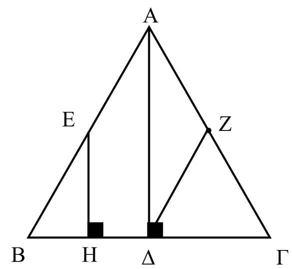
1. Στο διπλανό σχήμα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) το ΑΔ είναι ύψος του, ΑΒ = 10 cm και ΒΔ = 5 cm. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα ευθύγραμμα τμήματα: ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ΑΔ.



2. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά α. Αν ΑΔ ύψος και Ε μέσον του ΑΔ, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα τμήματα: ΑΒ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΕ.

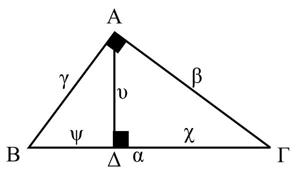
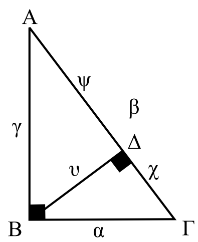
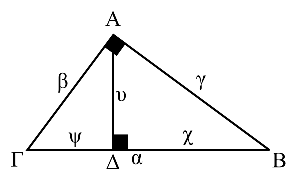


3. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά α. Αν ΑΔ ύψος του τριγώνου, Ε, Ζ μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΕΗ κάθετη στη ΒΓ, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα τμήματα: ΕΗ, ΑΒ, ΑΔ, ΔΖ.

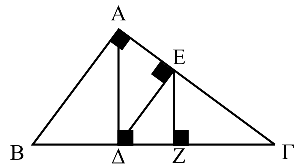


Ερωτήσεις αντιστοίχησης

1. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία των τριγώνων της στήλης (Α), να αντιστοιχήσετε κάθε τρίγωνο με μια σχέση της στήλης (Β).

στήλη (Α)	**στήλη (Β)**
	$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$
	$\beta^2 = \alpha . y$
	$\dfrac{\alpha^2}{\gamma^2} = \dfrac{x}{y}$
	$\gamma^2 = \alpha . y$
	$\alpha^2 = \beta . y$

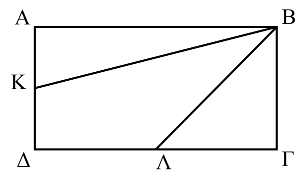
2. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α, $ΑΔ \perp ΒΓ$, $ΔΕ \perp ΑΓ$, $ΕΖ \perp ΔΓ$. Να αντιστοιχήσετε κάθε σχέση της στήλης (Α) με το τρίγωνο στο οποίο ισχύει, της στήλης (Β).



στήλη (Α) **Σχέσεις**	**στήλη (Β)** **Τρίγωνα**
$ΔΕ^2 = ΕΑ.ΕΓ$	ΑΕΔ
	ΑΔΓ
$ΔΕ^2 = ΔΓ.ΔΖ$	ΔΖΕ
$ΔΕ^2 = ΑΔ^2 - ΑΕ^2$	ΕΖΓ
	ΑΒΓ
$ΔΕ^2 = ΕΖ^2 + ΔΖ^2$	ΔΕΓ

Ερωτήσεις συνδυασμού διαφόρων τύπων

1. Στο σχήμα είναι το ΑΒΓΔ ορθογώνιο και τα Κ, Λ μέσα.



α) Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

i) $ΒΚ^2 = ΑΒ^2 +$ ....

ii) $ΒΛ^2 = ΒΓ^2 +$ ....

β) Αποδείξτε ότι: $ΒΚ^2 + ΒΛ^2 = \frac{5}{4}ΒΔ^2$

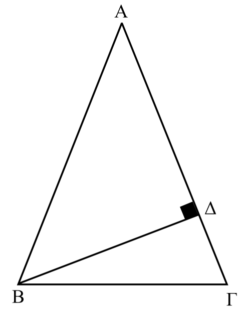
2. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή το Α και ΒΔ ύψος.

α) Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

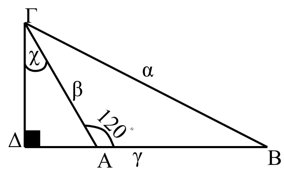
i) $ΒΔ^2 = ΒΓ^2$ - ....

ii) $ΒΔ^2 = ΑΒ^2$ - ....

β) Αποδείξτε ότι: $ΒΓ^2 = 2\ ΑΓ.ΔΓ$



3. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με Α = 120° και ΓΔ ύψος του τριγώνου.



α) Η γωνία x ισούται με:

i) 20° ii) 30° iii) 40°

iv) 50° v) 60°

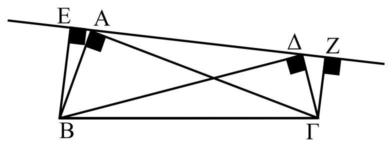
β) Από τις παρακάτω ισότητες, η σωστή είναι:

i) ΑΔ = ΔΓ ii) $ΑΔ = \frac{ΔΓ}{2}$ iii) $ΑΔ = \frac{ΑΓ}{2}$

iv) $ΔΓ = \frac{ΑΓ}{2}$ v) ΑΓ = ΑΔ.ΔΓ

γ) Αποδείξτε ότι: $α^2 = β^2 + γ^2 + βγ$.

4. Στο σχήμα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ έχουν κοινή υποτείνουσα και Ε, Ζ είναι οι προβολές των Β, Γ αντιστοίχως στην ΑΔ.



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται στο σχήμα είναι:

i) 4 ii) 5 iii) 6 iv) 7 v) 8

β) Από τις παρακάτω ισότητες σωστή είναι:

i) $ΑΕ^2 = ΑΒ^2 + ΒΕ^2$

ii) $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$

iii) $ΔΓ^2 = ΓΖ^2 - ΔΖ^2$

iv) $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$

v) $ΒΔ^2 = ΑΔ^2 - ΑΒ^2$

γ) Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

i) $AE^2 = AB^2$ - ....

ii) $AZ^2 = A\Gamma^2$ - ....

iii) $\Delta B^2 = BE^2$ + ...

iv) $\Delta\Gamma^2 = \Delta Z^2$ + ...

δ) Αποδείξτε ότι: $AE^2 + AZ^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2$

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α και ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Δ της ΒΓ φέρνουμε $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$. Γράφουμε και την ΑΔ.

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται στο σχήμα είναι:

i) 3 ii) 4 iii) 5 iv) 6 v) 7

β) Από τις παρακάτω ισότητες, είναι λάθος η ισότητα:

i) $A\Delta^2 = B\Delta.\Delta\Gamma$

ii) $A\Delta^2 = \Delta E^2 + AE^2$

iii) $A\Delta^2 = \Delta Z^2 + \Delta E^2$

iv) $A\Delta^2 = B\Delta.B\Gamma$

v) $A\Delta^2 = \Delta Z^2 + AZ^2$

γ) Αποδείξτε ότι: $B\Delta.\Delta\Gamma = AE.EB + AZ.Z\Gamma$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. *Πυθαγόρειες Τριάδες*

α) Αν οι φυσικοί αριθμοί α, β, γ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τους λα, λβ, λγ, όπου λ θετικός φυσικός αριθμός.

β) i) Αν ο αριθμός α είναι φυσικός περιττός και $\alpha \geq 3$, να αποδείξετε ότι οι φυσικοί αριθμοί α, $\frac{\alpha^2 - 1}{2}$, $\frac{\alpha^2 + 1}{2}$ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

ii) Αν ο αριθμός α είναι φυσικός άρτιος και $\alpha \geq 4$, να αποδείξετε ότι οι φυσικοί αριθμοί α, $\frac{\alpha^2}{4} - 1$, $\frac{\alpha^2}{4} + 1$ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου (*οι αριθμοί αυτοί αποδίδονται στους Πλατωνικούς*).

γ) Να αποδείξετε ότι οι φυσικοί αριθμοί $α^2$ - $β^2$, 2αβ, $α^2$ + $β^2$ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.
(*Θεωρείστε δεδομένο ότι αν οι α, β είναι φυσικοί αριθμοί, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα και ότι ο α είναι άρτιος αριθμός, οι τριάδες που παίρνουμε είναι διάφορες μεταξύ τους*).
Παρατήρηση: Στις παραπάνω περιπτώσεις (α), (β) και (γ) παίρνουμε ορθογώνια τρίγωνα με μήκη πλευρών φυσικούς αριθμούς. Εξετάστε, αν οι περιπτώσεις αυτές μπορούν να γενικευθούν για πραγματικούς αριθμούς.

2. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α = 90°, ΑΒ = 60 m και ΑΔ = 15 m, όπου Δ σημείο της ΑΓ. Να βρεθεί το μήκος του ΓΔ αν είναι ΑΒ + ΑΔ = ΓΔ + ΒΓ.

3. Οι προβολές των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου πάνω στην υποτείνουσα είναι 3 cm και 12 cm. Να βρεθούν το ύψος από την ορθή γωνία και οι κάθετες πλευρές του τριγώνου.

4. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου που έχει υποτείνουσα 10 cm και περίμετρο 24 cm.

5. Έστω ΑΒΓ (ΑΒ > ΑΓ) τυχαίο οξυγώνιο τρίγωνο. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ. Αποδείξτε ότι ισχύει: $ΑΒ^2 - ΑΓ^2 = ΒΔ^2 - ΓΔ^2$.

6. Έστω γωνία xOy = 45° και Μ τυχαίο σημείο στο εσωτερικό της. Από το Μ φέρνουμε κάθετη στην Ox που την τέμνει στο Α. Αν την Oy την τέμνει στο Β, αποδείξτε ότι: $ΑΒ^2 + ΑΜ^2 = ΟΜ^2$.

7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η μία κάθετη πλευρά είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 6 cm. Αν το άθροισμα των καθέτων πλευρών είναι 42 cm, να υπολογιστεί η υποτείνουσα του τριγώνου.

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) είναι ΑΒ = 2ΑΓ. Αν ΑΔ ύψος του ορθογωνίου, αποδείξτε ότι: ΒΔ = 4ΓΔ.

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) και έστω ΑΔ ύψος του τριγώνου. Αποδείξτε ότι:
α) $ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = ΒΔ\ (ΔΓ + ΒΓ)$
β) $ΑΓ^2 + ΑΔ^2 = ΔΓ\ (ΒΔ + ΒΓ)$

10. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΒΔ = ΒΓ = 14 cm και ΑΔ= ΔΓ = 8 cm.
α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ.
β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΓ.

11. Αν Μ είναι εσωτερικό σημείο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι: $ΜΑ^2 + ΜΓ^2 = ΜΒ^2 + ΜΔ^2$.

12. Ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι τέμνονται καθέτως. Να αποδειχθεί ότι: $ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΒΓ^2 + ΑΔ^2$.

13. Στη διαγώνιο ΒΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Ο. Να αποδειχθεί ότι: $ΓΔ^2 - ΓΟ^2 = ΒΟ\ .\ ΟΔ$.

14. Ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι γωνία Β = 60° και ΑΒ = λ. Να υπολογισθεί το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του λ.

15. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = 5 cm και ΓΔ = 1,4 cm. Αν ΑΔ = 3 cm, να υπολογίσετε το ύψος και τις διαγώνιές του.

16. Από την κορυφή Α τετραγώνου ΑΒΓΔ γράφουμε τυχαία ευθεία, που κόβει τις ΒΓ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Αν α είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{ΑΕ^2} + \frac{1}{ΑΖ^2} = \frac{1}{α^2}$.

17. Ενός ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ η μεγάλη βάση του ΑΒ είναι διπλάσια της πλευράς ΑΔ και η γωνία Α = 60°. Αν είναι γνωστό ότι το μήκος της πλευράς ΑΔ είναι λ, να υπολογιστούν:
α) το ύψος του τραπεζίου και
β) η άλλη βάση ΓΔ.